Étude dynamique des champs de Reeb et propriétés de croissance de l'homologie de contact

Anne Vaugon

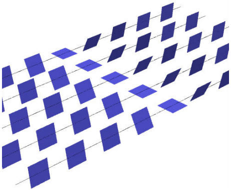
Laboratoire de Mathématiques Jean Leray
Université de Nantes

9 décembre 2011

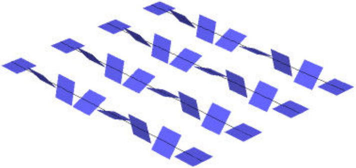
Géométrie de contact

Structure de contact coorientée sur une variété V de dimension 3 :
champ de plans $\xi = \ker(\alpha)$ sur V où $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$

Exemple :
$\alpha = dz - ydx$ dans $\mathbb{R}^3$



$\alpha = \sin(x)dy + \cos(x)dz$ dans $\mathbb{T}^3$



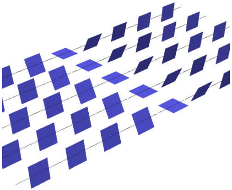
Forme de contact : 1-forme α telle que $\xi = \ker(\alpha)$

Champ de Reeb

- **Champ de Reeb** associé à une forme de contact α : champ de vecteurs R_α tel que

$$\begin{cases} d\alpha(R_\alpha, \cdot) = 0 \\ \alpha(R_\alpha) = 1 \end{cases}$$

- R_α dépend fortement de la forme α
- Exemple : $\alpha = dz - ydx$

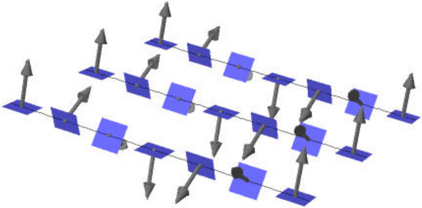


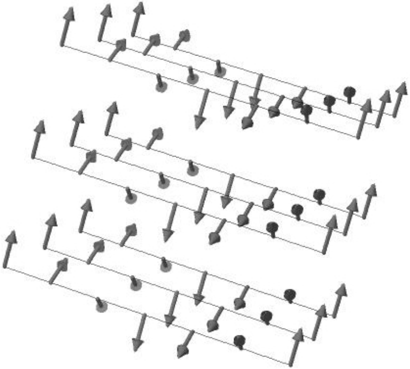
champ de Reeb : $R_\alpha = \frac{\partial}{\partial z}$

Champ de Reeb : exemple

$$\alpha = \sin(x)\,dy + \cos(x)\,dz$$

$$R_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(x) \\ \cos(x) \end{pmatrix}$$





Champ de Reeb

Questions :

- Les champs de Reeb associés à des formes de contact de la même structure de contact ont-ils des propriétés communes ?
- Comment extraire des informations sur la structure de contact à partir d'un champ de Reeb ?
- Existe-il des liens entre la géométrie de la variété et la croissance avec la période du nombre d'orbite de Reeb ?

On s'intéresse aux orbites périodiques du champ de Reeb.

Orbites périodiques du champ de Reeb

Théorème (Taubes, 2007)

Tout champ de Reeb associé à une forme de contact sur une variété compacte sans bord de dimension 3 admet au moins une orbite périodique.

Théorème (Hofer, 1993)

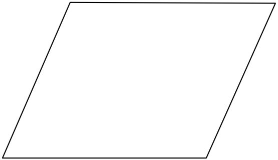
Tout champ de Reeb associé à une forme de contact vrillée sur une variété compacte sans bord de dimension 3 admet une orbite périodique contractile.

Homologie de contact (Eliashberg, Givental et Hofer)

- Obtenue à partir d'un complexe (C, ∂) où C est engendré par les produits d'orbites périodiques d'un champ de Reeb
- ∂ définie en «comptant» des courbes holomorphes
- Invariant de la structure de contact

Recollement de rocade (Honda)

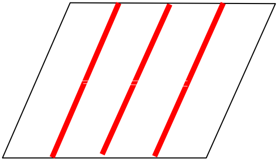
Recollement de rocade : attachement d'un demi-disque épaissi le long d'un **arc d'attachement** γ_0 situé dans ∂V



- on suppose que ∂V est convexe
- au voisinage du bord la structure de contact est codée par une courbe orientée Γ appelée **courbe de découpage** (Giroux)
- (V, Γ) est une variété suturée

Recollement de rocade (Honda)

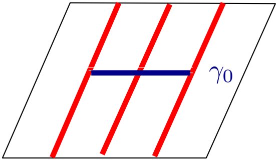
Recollement de rocade : attachement d'un demi-disque épaissi le long d'un **arc d'attachement** γ_0 situé dans ∂V



- on suppose que ∂V est convexe
- au voisinage du bord la structure de contact est codée par une courbe orientée Γ appelée **courbe de découpage** (Giroux)
- (V, Γ) est une variété suturée

Recollement de rocade (Honda)

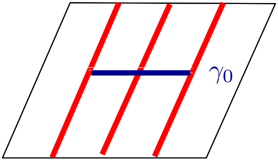
Recollement de rocade : attachement d'un demi-disque épaissi le long d'un **arc d'attachement** γ_0 situé dans ∂V

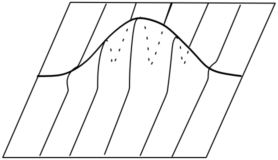


- on suppose que ∂V est convexe
- au voisinage du bord la structure de contact est codée par une courbe orientée Γ appelée **courbe de découpage** (Giroux)
- (V, Γ) est une variété suturée

Recollement de rocade (Honda)

Recollement de rocade : attachement d'un demi-disque épaissi le long d'un **arc d'attachement** γ_0 situé dans ∂V

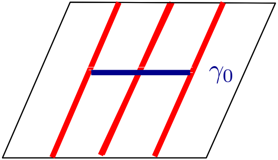


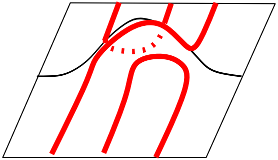


- on suppose que ∂V est convexe
- au voisinage du bord la structure de contact est codée par une courbe orientée Γ appelée **courbe de découpage** (Giroux)
- (V, Γ) est une variété suturée

Recollement de rocade (Honda)

Recollement de rocade : attachement d'un demi-disque épaissi le long d'un **arc d'attachement** γ_0 situé dans ∂V





- on suppose que ∂V est convexe
- au voisinage du bord la structure de contact est codée par une courbe orientée Γ appelée **courbe de découpage** (Giroux)
- (V, Γ) est une variété suturée

Recollement de rocade

- Modification élémentaire de la structure de contact : toute isotopie de surface est obtenue par une succession d'addition/retranchement de rocade
- Nouvelles orbites périodiques du champ de Reeb ?

Théorème de recollement de rocade

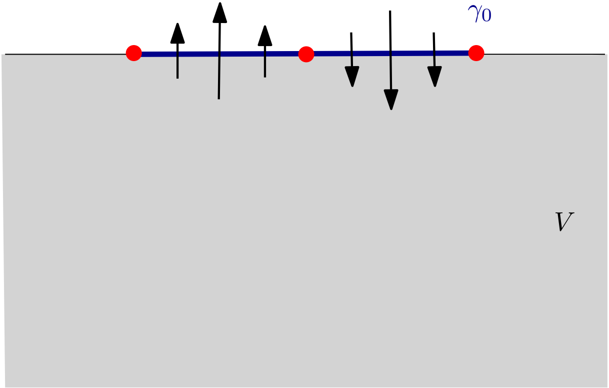
Théorème (A.V.)

Soient $(V, \xi = \ker(\alpha))$ une variété de contact de bord convexe, γ_0 un arc d'attachement sur ∂V et $K > 0$ avec α adaptée au bord.
Alors il existe $(V', \xi' = \ker(\alpha'))$ obtenue par recollement de rocade le long de γ_0 tel que

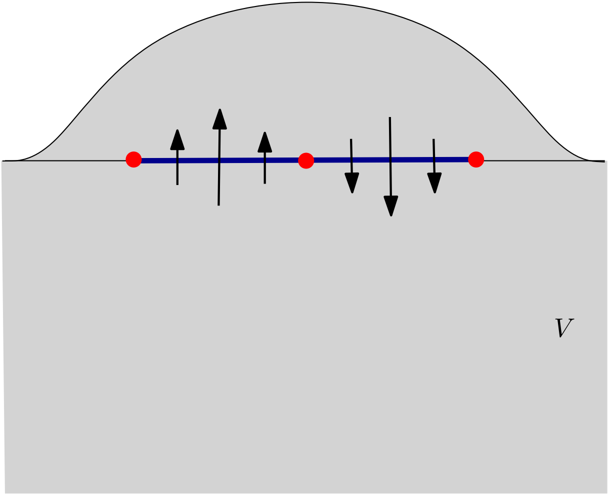
- α' est proche de α dans V et adaptée au bord de V' ;
- $\{$ nouvelles orbites périodiques de période $< K$ $\}$

  $\longleftrightarrow$ $\{$mots de période totale $< K$ en les cordes de Reeb de γ_0 à permutation cyclique près$\}$.

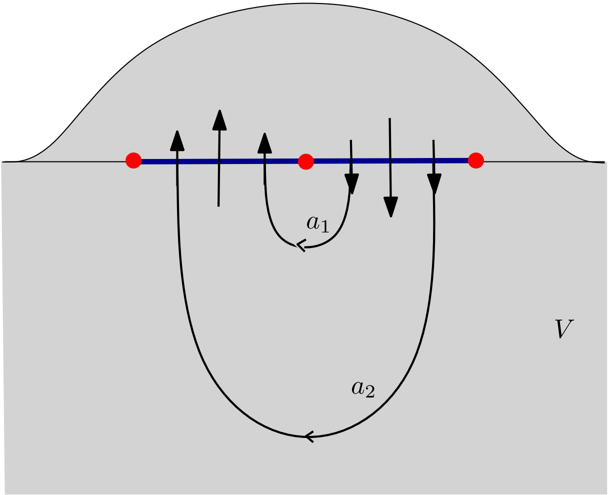
Théorème de recollement de rocade



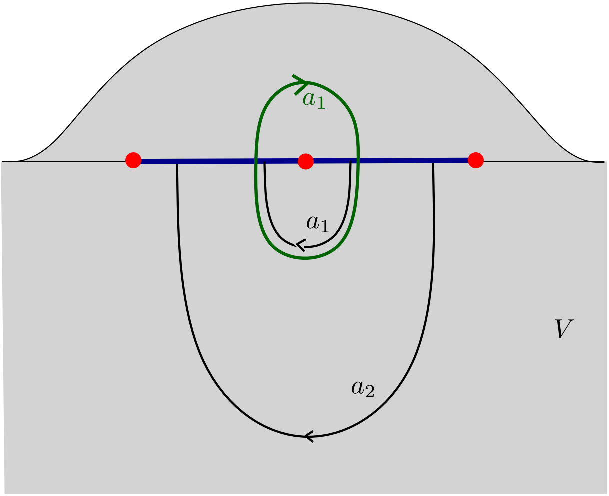
Théorème de recollement de rocade



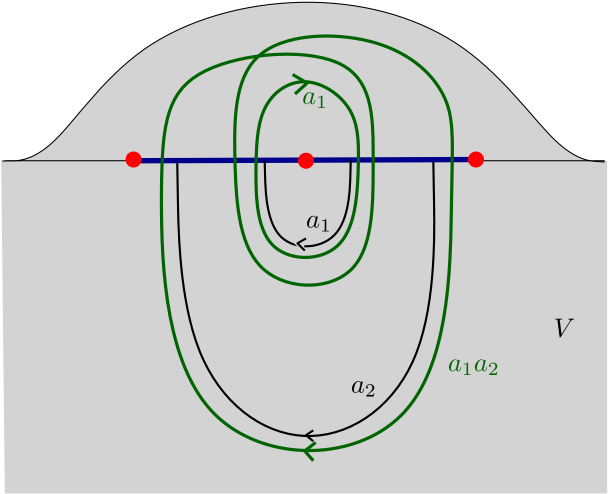
Théorème de recollement de rocade



Théorème de recollement de rocade



Théorème de recollement de rocade



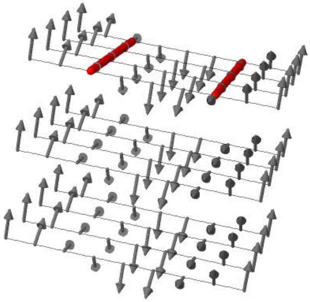
Convexité

- **Surface convexe** : il existe un champ de vecteurs transverse dont le flot préserve ξ
- Au voisinage de S convexe, ξ est codée par la **courbe de découpage de** S
- Dans les cas favorables, courbe de découpage de S : points de tangence entre R_α et S

Convexité

Exemple : $\alpha = \sin(x)dy + \cos(x)dz$

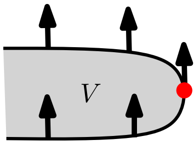
- $R_\alpha = (0, \sin(x), \cos(x))$
- $S = S^1 \times S^1 \times \{2\pi\}$ est convexe
- courbe de découpage : $\{\frac{\pi}{2}\} \times S^1 \times \{2\pi\} \cup \{\frac{3\pi}{2}\} \times S^1 \times \{2\pi\}$

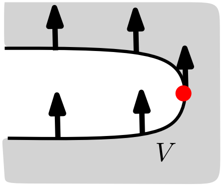


Équation adaptée au bord

α **adaptée à** (S, Γ) :

- Γ courbe de découpage de S
- R_α tangent à S exactement le long de Γ
- R_α pointe vers S_+ (zone où R_α est positivement transverse à S) le long de Γ

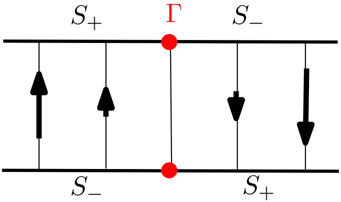




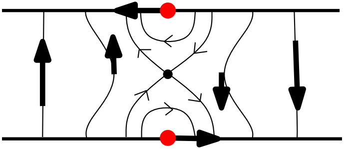
condition pour définir l'homologie de contact pour une variété à bord (Colin-Ghiggini-Honda-Hutchings)

Cas d'une surface convexe épaissie

Voisinage produit V d'une surface convexe (S, Γ) :



non adapté

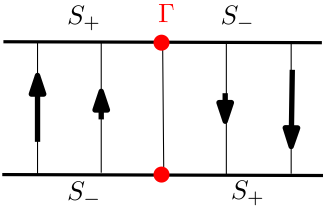


adapté

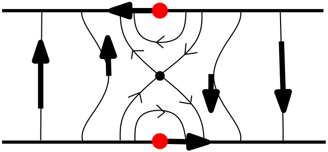
Proposition

L'homologie de contact cylindrique suturée est le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par $n+1$ orbites périodiques homotopes à $\Gamma_i \times \{0\}$ et par leurs multiples où $\Gamma = \bigcup_{i=0}^{n} \Gamma_i$.

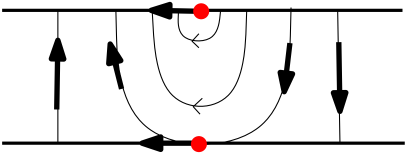
Cas d'une surface convexe épaissie



non adapté

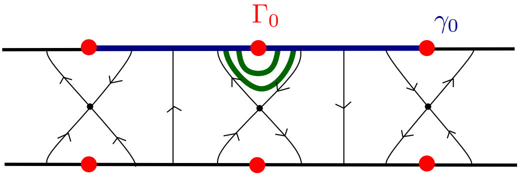


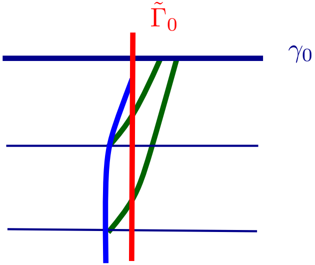
adapté



non adapté

Application du théorème de recollement de rocade





- une corde de Reeb de γ_0 par entier strictement positif
- { orbites périodiques homotopes à $[\Gamma_0]^k$ }

$\longleftrightarrow$ {décompositions $k = k_1 + \cdots + k_n$ avec $k_i > 0$
à permutation cyclique près}

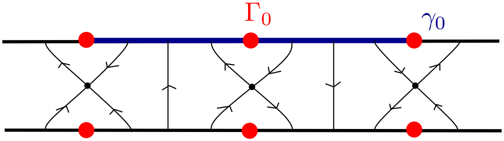
Calcul de l'homologie de contact

Proposition

L'homologie de contact cylindrique suturée est le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par $n+1$ orbites périodiques homotopes à $\Gamma_i \times \{0\}$ et par leurs multiples où $\Gamma = \bigcup_{i=0}^{n} \Gamma_i$.

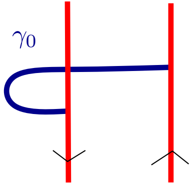
Théorème (A.V.)

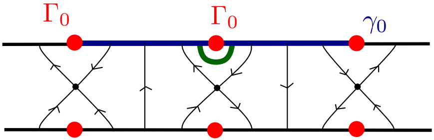
Après recollement de rocade le long de γ_0, l'homologie de contact cylindrique suturée est le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel engendré par n orbites périodiques homotopes à $\Gamma_i \times \{0\}$ et par leurs multiples.

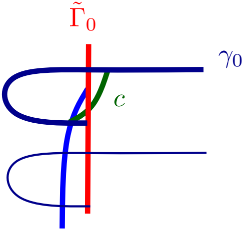


Cas d'un recollement dégénéré : rocade vrillée

- cas dégénéré : γ_0 n'intersecte que deux composantes connexes différentes de la courbe de découpage







- l'orbite périodique associée à c est contractile

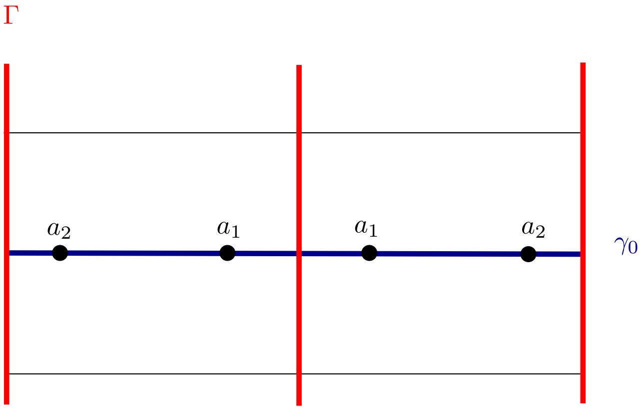
Théorème de recollement de rocade

Théorème (A.V.)

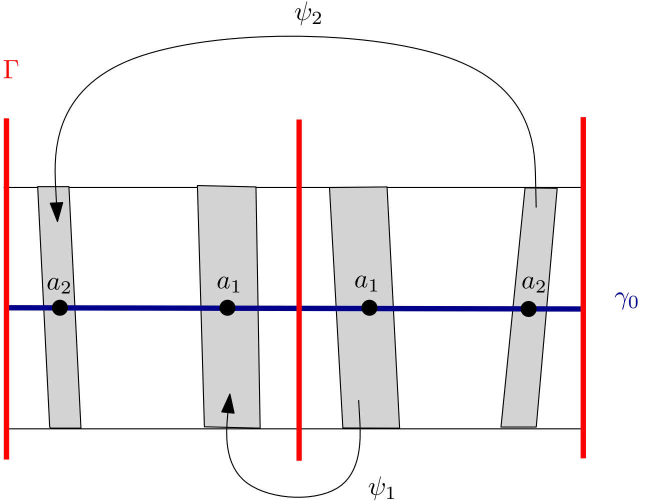
Soient $(V, \xi = \ker(\alpha))$ une variété de contact de bord convexe, γ_0 un arc d'attachement sur ∂V et $K > 0$ avec α adaptée au bord.
Alors il existe $(V', \xi' = \ker(\alpha'))$ obtenue par recollement de rocade le long de γ_0 tel que

- α' est proche de α dans V et adaptée au bord de V' ;
- { nouvelles orbites périodiques de période $\leq K$ }
  $\longleftrightarrow$ {mots de période totale $\leq K$ en les cordes de Reeb de γ_0 à permutation cyclique près}.

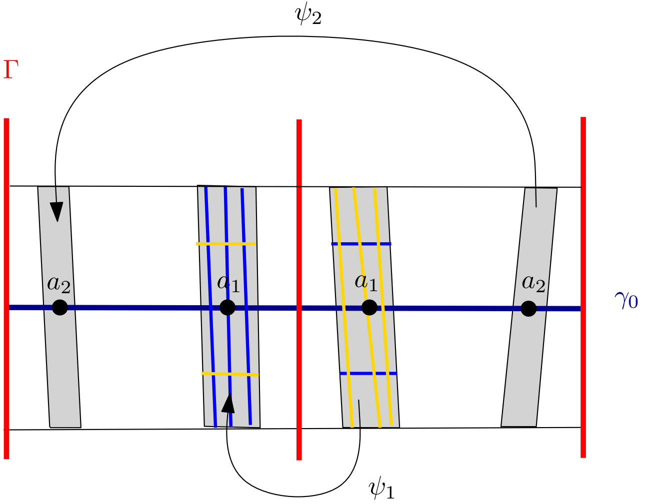
Dynamique dans la variété



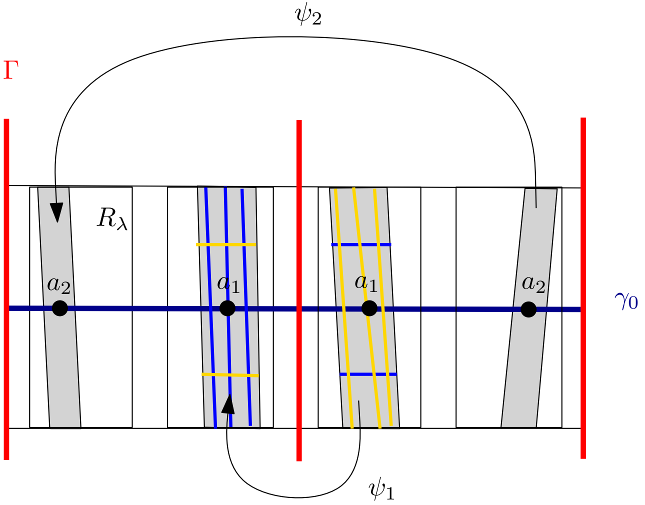
Dynamique dans la variété



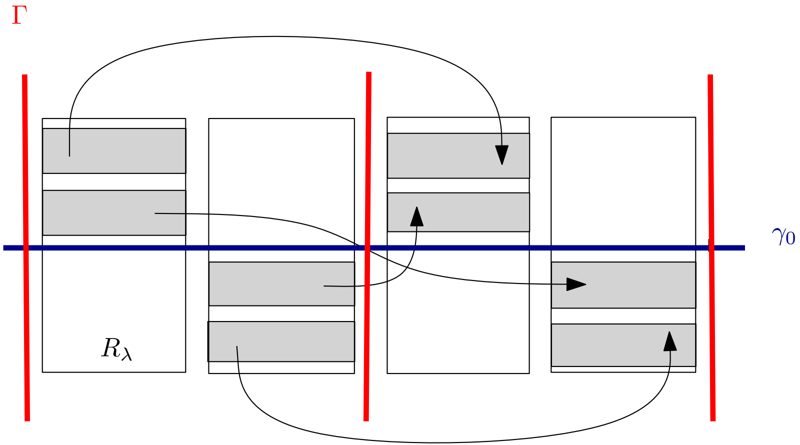
Dynamique dans la variété



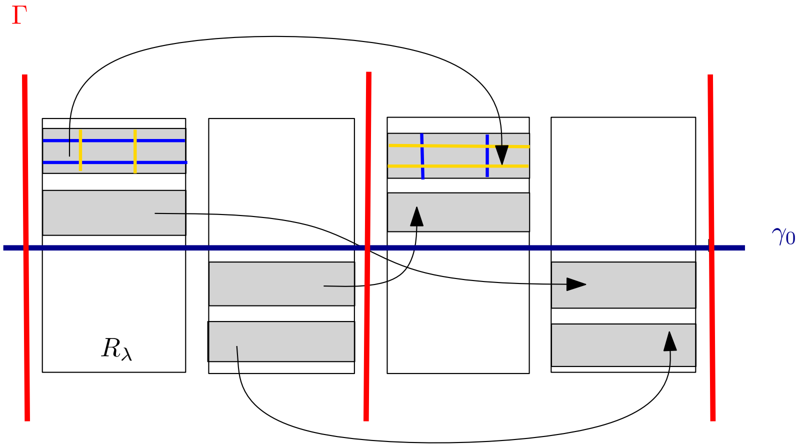
Dynamique dans la variété



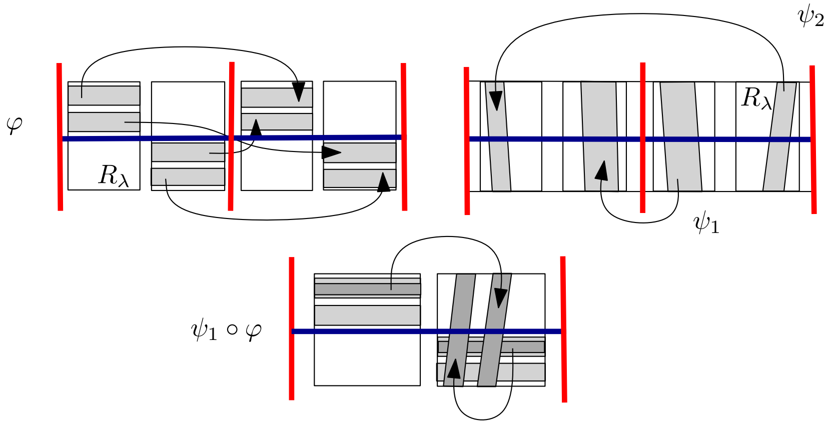
Dynamique dans la rocade



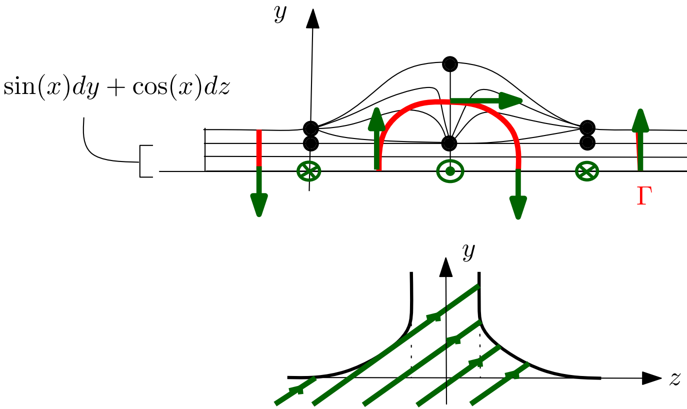
Dynamique dans la rocade



Orbites périodiques du champ de Reeb

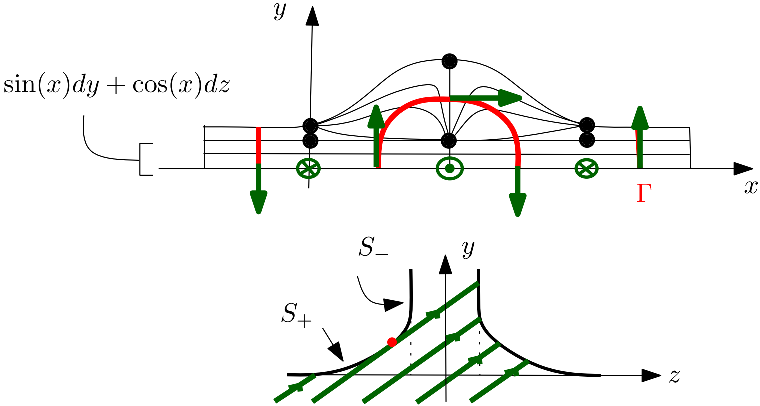


Champ de Reeb dans la rocade



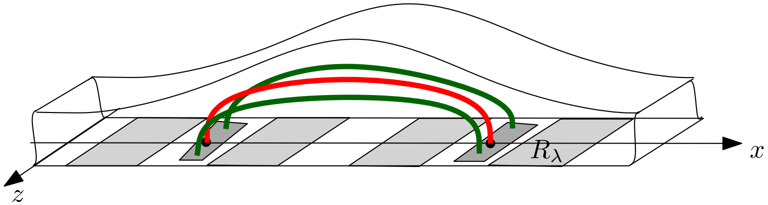
la forme de contact n'est pas adaptée au bord

Champ de Reeb dans la rocade



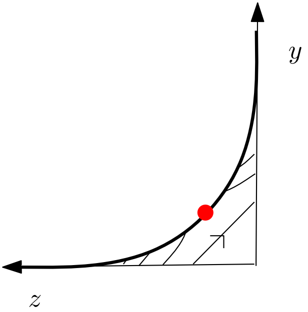
la forme de contact n'est pas adaptée au bord

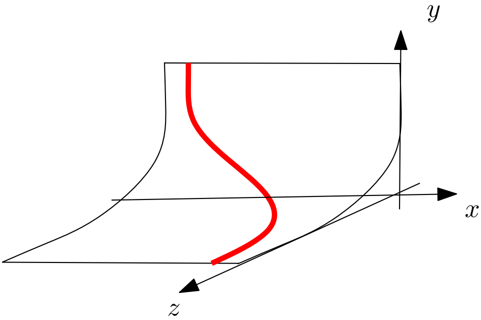
Application retour dans la rocade



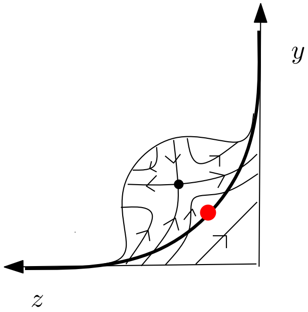
pas de création d'orbite périodique

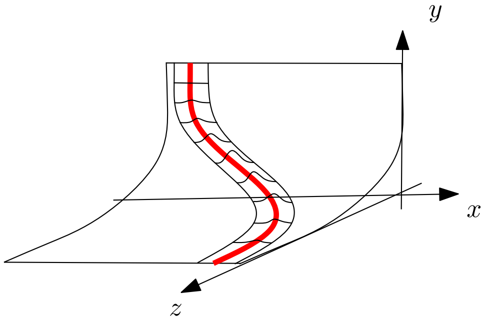
Convexification et apparition des orbites périodiques I



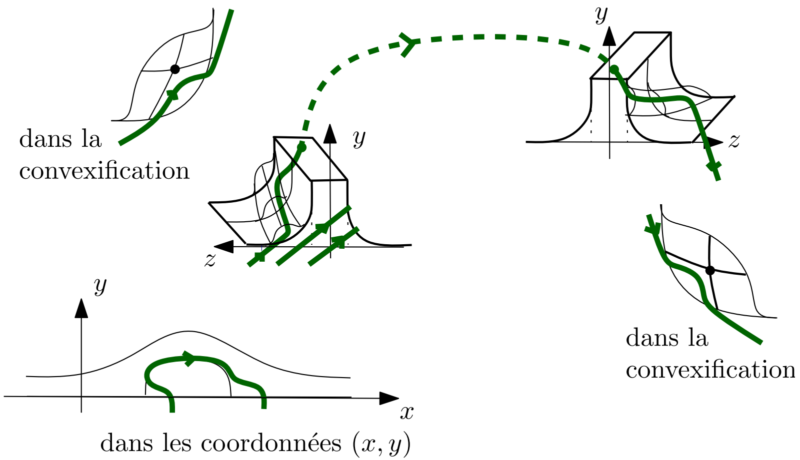


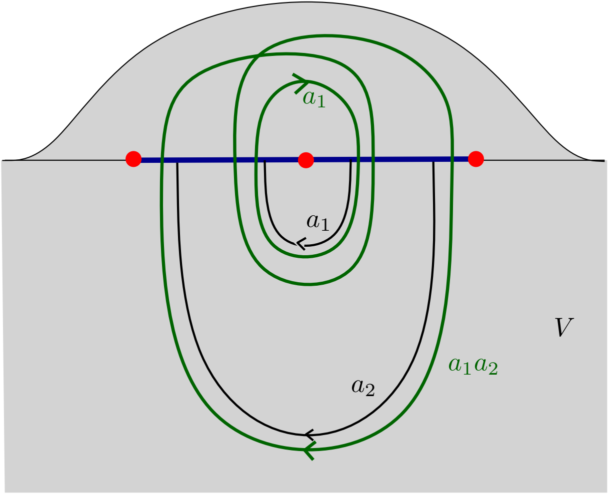
Convexification et apparition des orbites périodiques I





Convexification et apparition des orbites périodiques II





un recollement de rocade crée beaucoup d'orbites périodiques

Nombre d'orbites périodiques de Reeb $N_L(\alpha)$

$N_L(\alpha)$: nombre d'orbites périodiques de Reeb de période inférieure à L

Conjecture (Colin-Honda)

Sur une variété hyperbolique de dimension 3 compacte sans bord, pour toute forme de contact non dégénérée associée à une structure universellement tendue, $N_L(\alpha)$ croît exponentiellement avec L.

Nombre d'orbites périodiques de Reeb $N_L(\alpha)$

Théorème (A.V.)

Soit V une variété telle que

- V est de dimension 3, orientée, connexe, compacte sans bord
- V se découpe le long d'une famille non vide de tores incompressibles en variétés irréductibles comprenant une composante hyperbolique qui fibre sur le cercle.

Alors V porte une infinité de structures de contact non isomorphes telles que pour toute forme de contact α (non dégénérée et hypertendue) $N_L(\alpha)$ croisse exponentiellement avec L.

Perspectives

- Effet d'un recollement de rocade sur l'homologie de contact
  Obtenir un triangle exact entre homologies de contact
- Exemples de calculs de croissance de l'homologie de contact
- Orbites périodiques du champ de Reeb et structures vrillées
- Géométrie de contact en grande dimension