

Livres ouverts dans les variétés de contact de dimension
trois

Stage réalisé au Laboratoire Jean Leray de l'université de Nantes
sous la direction de Vincent Colin

Anne Vaugon

8 janvier 2008

Table des matières

1	Structures de contact	3
1.1	Définition	3
1.2	Champs de vecteurs de contact	4
1.3	Classification des structures de contact	6
1.4	Structures tendues et structures vrillées	7
1.5	Courbes legendriennes	7
1.6	Courbes transverses	9
2	Surfaces dans les variétés de contact	10
2.1	Feuilletages	10
2.1.1	Définition	10
2.1.2	Feuilletage caractéristique	12
2.2	Convexité en topologie de contact	13
2.2.1	Définition	13
2.2.2	Découpage	14
2.2.3	Surfaces convexes et feuilletage	16
2.2.4	Modification du feuilletage caractéristique	17
2.3	Le cas des surfaces à bord	19
2.4	Les variétés à bord	19
3	Livres ouverts	21
3.1	Définitions	21
3.2	Livres ouverts et suspensions	22
3.3	Plombage et stabilisation	23
3.4	Théorèmes de décomposition en livres ouverts	23
3.5	Tout livre ouvert porte une structure de contact	23
4	Toute structure de contact est portée par un livre ouvert	25
4.1	Cellulations polyédrales	25
4.1.1	Définitions	25
4.1.2	Modifications d'une cellulation polyédrale	26
4.2	Construction d'une cellulation de contact totale	27
4.2.1	Modification des arêtes	27
4.2.2	Modification des faces	29
4.2.3	Construction d'une cellulation polyédrale de contact totale	30
4.3	Obtention d'un scindement de Heegaard feuilleté	31
4.4	Obtention d'une équation de contact plus appropriée	35

Conventions et notations

Sauf mention explicite du contraire toutes les structures considérées dans ce rapport seront \mathcal{C}^∞ et les variétés considérées seront de dimension 3. De plus V sera toujours une variété de dimension 3 et ξ une structure de contact sur V . On note le fibré tangent à V par TV et l'espace tangent au point x par T_xV . L'ensemble $D(a, r)$ est le disque centré en a et de rayon r dans \mathbb{R}^2 ; S^1 est un cercle et plus généralement S^n la sphère de dimension n . Le bord d'un ensemble U dans un espace topologique est noté ∂U , son intérieur $\overset{\circ}{U}$. Enfin, on appelle *variété close* une variété différentielle \mathcal{C}^∞ compacte sans bord.

Introduction

Ce document est un rapport réalisé au cours de mon stage de Master 2 intitulé « Livres ouverts dans les variétés de contact de dimension trois » et effectué sous la direction de Vincent Colin au laboratoire Jean Leray de l'université de Nantes. L'objectif du stage est de comprendre et détailler la démonstration des théorèmes de décomposition en livre ouvert en dimension 3 d'Emmanuel Giroux [10].

Emmanuel Giroux a montré que les structures de contact en dimension 3 pouvaient être associées à des objets topologiques : les livres ouverts. Un livre ouvert sur une variété V de dimension 3 est la donnée d'un entrelacs K et d'une fibration $\theta : V \setminus K \rightarrow S^1$ qui est l'application coordonnée angulaire dans un voisinage tubulaire de K . On dit qu'une structure de contact est portée par un livre ouvert si une de ses équations est positive sur K et que sa différentielle induit une forme volume sur les feuilles. Les résultats de décomposition en livre ouvert sont les suivants : tout livre ouvert porte une structure de contact et toute structure de contact est portée par un livre ouvert. De plus, on peut définir une opération sur les livres ouverts, appelée stabilisation, qui permet de mettre en bijection les livres ouverts à stabilisation et isotopie près et les structures de contact à isotopie près. Les démonstrations de ces théorèmes utilisent de façon cruciale la théorie de la convexité des surfaces dans les variétés de contact développée par Emmanuel Giroux [8].

Le début de mon stage a été consacré à une familiarisation avec la théorie de la convexité en géométrie de contact. Puis je me suis attachée à comprendre les énoncés et démonstrations des théorèmes de décomposition en livre ouvert en m'appuyant sur le séminaire Bourbaki de Vincent Colin autour des travaux d'Emmanuel Giroux [3]. Enfin, j'ai travaillé à la rédaction d'une démonstration plus détaillée de ces théorèmes. Ce rapport présente une version plus complète de la démonstration du premier théorème de décomposition en livre ouvert.

Ce document commence par une présentation générale des structures de contact, puis une étude des surfaces dans les variétés de contact et plus particulièrement de la convexité. Ainsi les deux premiers chapitres présentent les outils de géométrie de contact indispensables à la compréhension des théorèmes de décomposition en livre ouvert, ainsi que quelques résultats plus généraux. La plupart des démonstrations des théorèmes fondamentaux de théorie de la convexité sont données. Le troisième chapitre est consacré à la présentation des livres ouverts et à l'énoncé des théorèmes de décomposition en livre ouvert. Enfin le dernier chapitre présente une démonstration plus détaillée du premier théorème.

Chapitre 1

Structures de contact

1.1 Définition

En toute généralité, une structure de contact est la donnée d'un champ d'hyperplans particulier sur une variété de dimension impaire. Dans ce rapport, nous ne nous intéresserons qu'à la dimension 3, une structure de contact sera donc un champ de plans particulier. Localement, tout champ de plans dans une variété V de dimension 3 peut être décrit comme le noyau d'une 1-forme sur V . Si la variété est orientée et si le champ de plans est orienté ou coorienté (ce qui revient au même car la variété est orientée), on peut décrire globalement le champ de plans par une 1-forme. On parle alors d'*équation du champ de plans*. Celle-ci n'est évidemment pas unique mais si deux 1-formes α et β sont des équations du même champ de plans sur V , alors il existe une fonction $f : V \rightarrow \mathbb{R}^*$ telle que $\alpha = f\beta$. Dans ce qui suit les champs de plans et les variétés seront toujours orientés et par conséquent tout champ de plans pourra être décrit par une 1-forme.

Définition 1.1. Une 1-forme α sur V est appelée une forme de contact si elle vérifie $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ en tout point de V . Cette condition est appelée condition de contact.

Un champ de plans ξ de classe C^∞ sur V est une structure de contact s'il admet pour équation une forme de contact.

Une variété de contact est la donnée d'une variété et d'une structure de contact.

Il faut vérifier que la définition de structure de contact ne dépend pas de l'équation du champ de plans choisie. Soient α et β deux équations de ξ . Soit $f : V \rightarrow \mathbb{R}^*$ la fonction lisse telle que $\alpha = f\beta$. La condition de contact pour β est $f\alpha \wedge d(f\alpha) = f^2\alpha \wedge d\alpha \neq 0$; par conséquent si α est une forme de contact β l'est aussi.

Par ailleurs, la forme différentielle $\alpha \wedge d\alpha$ est une 3-forme sur V , la condition $\alpha \wedge d\alpha \neq 0$ impose donc à cette 3-forme d'être une forme volume. Or d'après le paragraphe précédent toute équation de ξ oriente V de la même manière. Par conséquent, une structure de contact définit une orientation de la variété. Toutes les structures de contact considérées dans ce rapport définiront l'orientation de la variété. On écrira alors l'équation de contact sous la forme $\alpha \wedge d\alpha > 0$.

La condition de contact équivaut à la condition : $d\alpha$ est non dégénérée sur les plans de la structure de contact. De plus, l'image réciproque d'une équation de contact par un difféomorphisme est encore une équation de contact.

Exemple. Dans \mathbb{R}^3 repéré par les coordonnées cartésiennes (x, y, z) la 1-forme

$$\alpha_0 = dz - ydx$$

est une équation de contact. Elle définit une structure de contact appelée *structure standard*. L'espace \mathbb{R}^3 admet d'autres équations de contact comme la 1-forme

$$\alpha_1 = dz + r^2 d\theta$$

en coordonnées cylindriques (r, θ, z) . La sphère S^3 vue comme sphère unité de

$$\mathbb{C}^2 = \{(r_1 \exp i\theta_1, r_2 \exp i\theta_2)\}$$

porte la forme de contact

$$\alpha = r_1^2 d\theta_1 + r_2^2 d\theta_2.$$

En fait, on peut mettre une structure de contact sur toute variété orientée de dimension 3.

La condition de contact est la condition « contraire » à celle d'intégrabilité de Frobenius : elle impose au champ de plans de « tourner ». Pour illustrer cette affirmation, plaçons nous dans un cas particulier et considérons une structure de contact ξ définie sur un ouvert $U \subset \mathbb{R}^3$ par l'équation α . On munit \mathbb{R}^3 des coordonnées cartésiennes (x, y, z) . On suppose qu'en tout point de U , $\frac{\partial}{\partial x} \in \xi$ et $\frac{\partial}{\partial y} \notin \xi$. Alors, quitte à multiplier α par une fonction qui ne s'annule pas, il existe $q : U \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\alpha = dy + q(x, y, z)dz$. Le plan de contact contient les vecteurs $u = \frac{\partial}{\partial x}$ et $v = q\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial z}$. La condition de contact s'écrit $-\frac{\partial q}{\partial x} > 0$. Donc lorsque la coordonnée x varie, v aussi et le champ de plans « tourne ».

Comme les structures symplectiques, les structures de contact ont toutes la même forme localement.

Théorème 1.2 (Darboux). *Soit a un point de (V, ξ) . Alors il existe un voisinage U de a dans V , un voisinage U' de 0 dans \mathbb{R}^3 et un difféomorphisme $\varphi : U \rightarrow U'$ tels que $\varphi^*\xi_0 = \xi$, où ξ_0 est la structure standard de \mathbb{R}^3 .*

Démonstration. Soit D un disque plongé dans V de centre a et transverse à ξ . Soit X un champ de vecteurs défini dans un voisinage U de D , transverse à D et tel que pour tout $x \in U$ on ait $X(x) \in \xi(x)$. D'après le théorème de la boîte de flot, il existe un réel strictement positif T et un difféomorphisme $\psi : D \times]-T, T[\rightarrow W \subset V$ tel que $\psi(x_0, t)$ soit la solution de l'équation différentielle $y' = X(y)$ issue de $x_0 \in D$, prise au temps t .

On note f un plongement du disque unité $D(0, 1)$ de \mathbb{R}^2 (repéré par les coordonnées (u, v)) dans W d'image D . En transportant ξ par

$$\begin{aligned} \varphi : D(0, 1) \times]-T, T[&\rightarrow W \\ (u, v, t) &\mapsto \psi(f(u, v), t). \end{aligned}$$

on obtient une structure de contact ξ' sur $U' = D(0, 1) \times]-T, T[$.

Par construction, pour tout point dans U' , le vecteur $\frac{\partial}{\partial t} \in \xi'$. Par conséquent, l'équation de contact est de la forme

$$\alpha(u, v, t) = p(u, v, t)du + q(u, v, t)dv.$$

Quitte à effectuer un changement de base sur $D(0, 1)$, on peut supposer que $q(0, 0, 0) = 0$. On a alors $p(0, 0, 0) \neq 0$. Quitte à multiplier l'équation de contact α par une fonction positive et à restreindre U' , on peut supposer que $\alpha = du + q(u, v, t)dv$ sur U' . La condition de contact s'écrit alors $-\frac{\partial q}{\partial t} > 0$. L'application

$$\begin{aligned} g : U' &\rightarrow U \\ (u, v, t) &\mapsto (u, v, -q(u, v, t)). \end{aligned}$$

est un difféomorphisme de U' dans un voisinage U de 0 (car $q(0, 0, 0) = 0$). La structure de contact $g_*\xi'$ est définie par l'équation $\alpha = du - tdv$ dans U . \square

1.2 Champs de vecteurs de contact

Proposition 1.3. *Soit α une équation de contact sur V . Il existe un unique champ de vecteurs lisse, appelé champ de Reeb, vérifiant $i_R\alpha = 1$ et $i_Rd\alpha = 0$ sur V .*

Démonstration. Soit $x \in V$, $d\alpha(x)$ est une forme bilinéaire alternée non nulle sur T_xV . Donc son noyau est de dimension 1. Notons v un vecteur de base de ce noyau. Comme $d\alpha(x)|_{\xi_x}$ est non dégénérée, $v \notin \xi_x$ et par conséquent $\alpha(x) \cdot v \neq 0$, on prend

$$R(x) = \frac{v}{\alpha(x) \cdot v}.$$

Le champ R obtenu est lisse. \square

Exemple. Dans \mathbb{R}^3 muni de la forme de contact standard $\alpha_0 = dz - ydx$, le champ de Reeb est le champ $\frac{\partial}{\partial z}$.

Définition 1.4. *Un champ de vecteurs sur une variété de contact est dit de contact si son flot préserve la structure de contact.*

Un champ de Reeb est un champ de contact. En effet, notons α une équation de contact, R le champ de Reeb associé et φ_t le flot de R . Alors $\frac{\partial \varphi_t^* \alpha}{\partial t} = 0$ et donc φ_t préserve l'équation α .

Proposition 1.5. *Soit α une équation de contact sur V . Soit X un champ de vecteurs sur V , les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. X est un champ de contact
2. $L_X \alpha|_\xi = 0$.

Démonstration. Notons φ_t le flot de X . Si X est un champ de contact alors il existe $\lambda_t : V \rightarrow \mathbb{R}^*$ tel que $\varphi_t^* \alpha = \lambda_t \alpha$. En dérivant l'expression précédente par rapport à t , il vient

$$\varphi_t^* L_X \alpha = \frac{\partial \lambda_t}{\partial t} \alpha = \mu_t \alpha.$$

Donc $L_X \alpha = \mu_t \alpha$ avec

$$\mu_t = \left(\frac{1}{\lambda_t} \frac{\partial \lambda_t}{\partial t} \right) \circ \varphi_t^{-1}$$

et $L_X \alpha|_\xi = 0$.

Réciproquement si $L_X \alpha|_\xi = 0$, alors il existe $\mu : V \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $L_X \alpha = \mu \alpha$. On a alors

$$\frac{\partial}{\partial t} \varphi_t^* \alpha = \varphi_t^* L_X \alpha = \mu \circ \varphi_t^{-1} \varphi_t^* \alpha$$

d'où $\varphi_t^* \alpha_t = \exp(\mu \circ \varphi_t^{-1}) \exp(-\mu) \alpha$. Par conséquent la structure de contact est préservée par le φ_t et X est un champ de contact. \square

Théorème 1.6 (Lieberman). *Soient V une variété de contact et α une équation du champ de contact sur V , l'application $f : X \mapsto \alpha(X)$ est une bijection entre les champs de vecteurs de contact et les fonctions lisses de V dans \mathbb{R} .*

Sa réciproque est la fonction $g : H \mapsto X_H$ où X_H est l'unique champ de vecteur tel qu'en tout point $\alpha(X_H) = H$ et $i_{X_H} d\alpha = dH(R)\alpha - dH$ avec R le champ de Reeb associé à α .

Le théorème de Lieberman permet de prolonger des champs de contact définis seulement localement.

Démonstration. Montrons tout d'abord que X_H est bien défini, c'est à dire que les conditions ci-dessus définissent un unique champ de vecteur X_H . L'idée est d'écrire $X_H(x)$ comme somme d'un vecteur dans $\xi(x)$ et d'un vecteur colinéaire à $R(x)$. Considérons l'équation $i_Z d\alpha = -dH$ en restriction à ξ , c'est la restriction à ξ de la condition $i_{X_H} d\alpha = dH(R)\alpha - dH$. Comme $d\alpha$ est une 2-forme non dégénérée sur ξ , l'équation précédente admet un unique champ de vecteurs solution noté Z . Posons $X_H = HR + Z$. Le champ obtenu vérifie les relations $\alpha(X_H) = H$ et $i_{X_H} d\alpha = dH(R)\alpha - dH$ sur ξ et sur le champ de droites engendrées par R et donc sur tout l'espace par linéarité. De plus ces conditions définissent un champ unique car Z est déterminé de manière unique.

Montrons maintenant que X_H est un champ de contact. On utilise la proposition précédente. On a $L_{X_H} \alpha = i_{X_H} d\alpha + di_{X_H} \alpha = dH(R)\alpha$. Donc $L_{X_H} \alpha|_\xi = 0$ et X_H est un champ de contact.

Il reste à vérifier que g est l'application réciproque de f . Il est clair que $f \circ g = \text{Id}$. Montrons que $g \circ f = \text{Id}$, pour cela fixons un champ de contact X . On écrit X sous la forme $X = \alpha(X)R + Z$. Il existe un champ de vecteurs Z_1 de ξ tel que $g(f(X)) = \alpha(X)R + Z_1$ et $i_{Z_1} d\alpha = -i_X d\alpha$ sur ξ . Or $i_Z d\alpha = -i_X d\alpha$ sur ξ . Par unicité de la solution de l'équation $i_Y d\alpha = -i_X d\alpha$, on a $Z = Z_1$ et $g \circ f = \text{Id}$. \square

1.3 Classification des structures de contact

Définition 1.7. Soient V_0 et V_1 deux variétés. Deux structures de contact ξ_0 sur V_0 et ξ_1 sur V_1 sont conjuguées s'il existe un difféomorphisme $\varphi : V_0 \rightarrow V_1$ tel que $\varphi^*\xi_0 = \xi_1$. Un tel difféomorphisme est appelé un contactomorphisme.

Deux structures de contact sur V_0 sont isotopes si elles sont conjuguées par un difféomorphisme isotope à l'identité.

Exemple. Les deux structures de \mathbb{R}^3 présentées dans la section 1.1 sont isotopes. En effet le difféomorphisme

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto \left(\frac{x-y}{2}, \frac{x+y}{2}, z - \frac{xy}{2} \right)$$

vérifie $\varphi^*\xi_1 = \xi_0$.

Soient ξ_0 et ξ_1 deux structures de contact isotopes. Notons φ_t l'isotopie vérifiant $\varphi_1^*\xi_0 = \xi_1$ et $\varphi_0 = \text{Id}$. Alors pour tout t , $\varphi_t^*\xi_0 = \xi_t$ est une structure de contact. Par conséquent ξ_0 et ξ_1 sont homotopes parmi les structures de contact. La réciproque est vérifiée sur certaines variétés, comme le montre le théorème de Gray.

Théorème 1.8 (Gray). *Sur une variété close, deux structures de contact homotopes parmi les structures de contact sont isotopes.*

La démonstration de ce théorème est fondée sur la méthode de Moser. Il s'agit d'une méthode très générale dont on donne ici une formulation adaptée à la géométrie de contact. Cette méthode est à la base de plusieurs démonstrations de ce rapport. Elle permet de monter l'existence de contactomorphismes isotopes à l'identité en les cherchant sous forme de flot au temps 1 d'un champ de vecteurs judicieusement choisi.

Lemme 1.9 (Méthode de Moser). *Soit $t \mapsto \alpha_t$ un chemin lisse d'équations de contact. On note ξ_t la structure de contact associée à l'équation α_t . Soit X_t un champ de vecteurs sur V dépendant du temps tel que $X_t \in \xi_t$ en tout point de V . On suppose que son flot ψ_t est défini jusqu'au temps 1. Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. Le flot vérifie $\psi_t^*\xi_t = \xi_0$.
2. Le champ de vecteurs X_t vérifie

$$\mu_t \alpha_t = \frac{\partial \alpha_t}{\partial t} + i_{X_t} d\alpha_t$$

avec $\mu_t = \frac{\partial \alpha_t}{\partial t}(R_t)$, où R_t est le champ de Reeb associé α_t .

Démonstration. Si $\psi_t^*\xi_t = \xi_0$ alors il existe $\lambda_t : V \rightarrow \mathbb{R}$ tel que $\psi_t^*\alpha_t = \lambda_t \alpha_0$. En différenciant l'expression précédente par rapport à t on obtient

$$\mu_t \alpha_t = \frac{\partial \alpha_t}{\partial t} + i_{X_t} d\alpha_t$$

avec $\mu_t = \left(\frac{1}{\lambda_t} \frac{\partial \lambda_t}{\partial t} \right) \circ \psi_t^{-1}$. On évalue sur le champ de Reeb pour obtenir la valeur de μ_t cherchée.

Réciproquement, on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \varphi_t^* \alpha_t &= \varphi_t^* \left(\frac{\partial \alpha_t}{\partial t} + i_{X_t} d\alpha_t \right) \\ &= \varphi_t^* (\mu_t \alpha_t) \\ &= (\mu_t \circ \psi_t^{-1}) \varphi_t^* \alpha_t. \end{aligned}$$

Par conséquent $\varphi_t^* \alpha_t = \exp(\mu_t \circ \varphi_t^{-1}) \exp(-\mu_0) \alpha_0$. Donc $\psi_t^*\xi_t = \xi_0$. □

Démonstration du théorème de Gray. Notons ξ_0 et ξ_1 les deux structures de contact. Comme ξ_0 et ξ_1 sont homotopes, il existe un chemin continu $t \mapsto \xi_t$ parmi les structures de contact joignant ξ_0 et ξ_1 . La condition de contact est une condition ouverte, donc il est possible de lisser ce chemin pour qu'il devienne C^∞ . Il existe un chemin lisse d'équations de ξ_t , on le note

α_t . On veut utiliser la méthode de Moser, pour cela on va construire un champ de vecteurs vérifiant la condition

$$\mu_t \alpha_t = \frac{\partial \alpha_t}{\partial t} + i_{X_t} d\alpha_t$$

avec $\mu_t = \frac{\partial \alpha_t}{\partial t}(R_t)$.

Soient $x \in V$ et $t \in [0, 1]$. La forme bilinéaire $d\alpha_t(x)$ restreinte à $\xi_t(x)$ est non dégénérée et $\mu_t(x)\alpha_t(x) - \frac{\partial \alpha_t}{\partial t}(x)$ est une forme linéaire sur $\xi_t(x)$, donc il existe $X_t(x) \in \xi_t(x)$ tel que $\mu_t(x)\alpha_t(x) - \frac{\partial \alpha_t}{\partial t}(x) = i_{X_t(x)} d\alpha_t(x)$. On définit ainsi un champ lisse dépendant du temps X_t tel que sur ξ on ait $\mu_t \alpha_t - \frac{\partial \alpha_t}{\partial t} = i_{X_t} d\alpha_t$ en tout point. Cette relation est aussi vérifiée en tout point par le champ de Reeb. Donc par linéarité elle est vérifiée sur TV . Le flot ψ_t de ce champ de vecteurs est défini pour tout temps car la variété V est close. Donc par la méthode de Moser $\psi_t^* \xi_t = \xi_0$; par conséquent ψ_1 est isotope à l'identité, $\psi_1^* \xi_1 = \xi_0$ et les structures ξ_0 et ξ_1 sont isotopes. \square

1.4 Structures tendues et structures vrillées

Pour plus d'informations sur les définitions et les théorèmes évoqués dans cette section, on pourra consulter [9].

Définition 1.10. *Une structure de contact est vrillée s'il existe un disque plongé dans V dont le bord est une courbe legendrienne d'invariant de Thurston-Bennequin¹ nul. Un tel disque est appelé un disque vrillé. Une structure de contact non vrillée est dite tendue.*

Théorème 1.11 (Bennequin). *Les structures usuelles sur \mathbb{R}^3 et S^3 sont tendues.*

La distinction entre structures vrillées et tendues permet d'obtenir des résultats de classification des structures. Il est clair que l'isotopie ne change pas le caractère de la structure. Pour les structures vrillées la situation se ramène à l'étude des champs de plans.

Théorème 1.12 (Eliashberg). *Sur une variété de contact de dimension 3 close, si deux structures vrillées sont homotopes parmi les champs de plans alors elles sont isotopes.*

Pour les structures tendues la situation est plus délicate. Voici quelques théorèmes qui illustrent la diversité des situations qui existent.

Théorème 1.13 (Eliashberg). *La structure usuelle sur \mathbb{R}^3 et S^3 est la seule structure tendue à isotopie près.*

Théorème 1.14 (Giroux). *Sur le tore il existe des structures de contact tendues homotopes comme champs de plans mais non isotopes.*

Théorème 1.15 (Eliashberg). *Sur $\mathbb{R}^2 \times S^1$ il existe une famille continue de structures tendues deux à deux non conjuguées.*

1.5 Courbes legendriennes

Définition 1.16. *Une courbe legendrienne sur une variété de contact est une courbe tangente au champ de contact en chaque point.*

Intéressons nous pour quelques lignes aux courbes legendriennes dans \mathbb{R}^3 muni de la structure standard $\alpha_0 = dz - ydx$. Pour étudier ces courbes il est pertinent de considérer leur projection sur le plan (x, z) .

Définition 1.17. *Un diagramme legendrien est une courbe dans le plan (x, z) sans tangentes verticales et n'ayant pour singularités que des intersections transverses simples et des points de rebroussement de première espèce appelés cusps.*

Soit γ une courbe legendrienne. Il existe une isotopie \mathcal{C}^0 -petite parmi les courbes legendriennes qui joint γ à une courbe legendrienne dont la projection sur (x, z) est un diagramme legendrien.

1. voir la définition 1.20

Proposition 1.18. *Soit λ un diagramme legendrien. Il existe une unique courbe legendrienne dont la projection sur (x, z) est λ .*

Démonstration. On paramètre la courbe λ par

$$\begin{aligned} \lambda : I &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto (x(t), y(t)). \end{aligned}$$

Pour t tel que $x'(t) \neq 0$, on pose $y(t) = \frac{z'(t)}{x'(t)}$. Si $x'(t) = 0$, on est au niveau d'un cusp car λ n'a pas de tangente verticale. Alors $\frac{z'(s)}{x'(s)}$ admet une limite lorsque s tend vers t , on prend pour $y(t)$ la valeur de cette limite. La courbe $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ est lisse et legendrienne car la condition de contact s'écrit $z'(t) = y(t)x'(t)$. Une telle courbe est unique car la condition de contact impose $z'(t) = y(t)x'(t)$ et donc la valeur de y en tous les points pour lesquels x' est non nul. \square

Proposition 1.19. *Soit γ une courbe dans une variété de contact. On peut déformer γ en une courbe legendrienne par une isotopie (à extrémités fixées) \mathcal{C}^0 -petite.*

Démonstration. On se place tout d'abord dans le cas particulier où (V, ξ) est \mathbb{R}^3 muni de la structure standard. Soit ε un réel strictement positif. On paramètre la courbe γ par

$$\begin{aligned} \gamma : I &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\longmapsto (x(t), y(t), z(t)). \end{aligned}$$

Quitte à effectuer une isotopie \mathcal{C}^∞ -petite on peut supposer que la projection de γ sur le plan (x, z) n'a que des intersections doubles et transverses. Quitte à diminuer ε , on peut supposer que si $x(t) = x(t')$, $z(t) = z(t')$ et $t \neq t'$ alors $|y(t) - y(t')| > \varepsilon$. On projette γ sur le plan (x, z) . On isotope dans le plan (x, z) la courbe projetée à un diagramme legendrien ayant en tout t une pente proche de $y(t)$ à ε près. On note (x_s, z_s) cette isotopie.



En garantissant que les points doubles de $(x_s(I), z_s(I))$ soient suffisamment proches des points doubles de γ , on peut imposer que $x_s(t) = x_s(t')$ et $z_s(t) = z_s(t')$ implique $|y(t) - y(t')| > \varepsilon$. Notons (x_1, y_1, z_1) la courbe legendrienne obtenue à partir du diagramme legendrien (x_1, z_1) . On considère l'isotopie $\delta : s \mapsto (x_s, (1-s)y + sy_1, z_s)$. Pour tout $s \in [0, 1]$, $\delta_s(I)$ ne contient pas de point double, donc il s'agit bien d'une courbe. De plus la distance entre γ et $\delta_s(I)$ est toujours inférieure à ε . Dans le cas général, on utilise le théorème de Darboux pour se ramener au cas précédent. \square

Définition 1.20. *Soit γ une courbe legendrienne dans la variété de contact (V, ξ) . L'invariant de Thurston-Bennequin de γ est le nombre d'enlacement de γ et de γ_ε , où γ_ε est obtenue en poussant légèrement γ suivant un champ de vecteurs normal à ξ . Il est noté $\text{tb}(\gamma)$.*

Dans la définition précédente *pousser légèrement γ suivant un champ de vecteur normal* signifie que l'on regarde l'image de γ par le flot pour un temps petit d'un champ de vecteurs qui est normal à ξ le long de γ . On sous-entend que le nombre d'enlacement obtenu ne dépend pas du champ de vecteurs choisi, ni du temps auquel le flot est considéré du moment qu'il est suffisamment petit.

L'invariant de Thurston-Bennequin a un certain nombre d'interprétations et de définitions équivalentes. Par exemple, c'est aussi le nombre algébrique d'intersections le long de γ entre ξ et le plan tangent à une surface compacte orientée de bord γ . Il existe aussi une définition basée sur les diagrammes legendriens qui consiste à compter le nombre de cusps et de croisements.

Les courbes legendriennes possèdent une structure locale particulière.

Proposition 1.21. *Soit $\gamma : [-1, 1] \rightarrow V$ une courbe legendrienne simple. Alors il existe un contactomorphisme φ d'un voisinage de γ dans un ouvert U de \mathbb{R}^3 muni de la structure de contact usuelle tel que $\varphi(\gamma) \subset \{(x, 0, 0), x \in \mathbb{R}\}$*

Démonstration. La démonstration est une adaptation de la preuve du théorème de Darboux en prenant une surface D transverse à ξ et définie comme image d'une application

$$f :]-1, 1[\times]-1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[\rightarrow V$$

vérifiant pour tout $s \in [-1, 1]$, $f(0, s) = \gamma(s)$. □

Théorème 1.22 (Inégalité de Bennequin). *Soit γ une courbe legendrienne dans une variété de contact tendue. Soit S une surface de bord γ . Alors $\text{tb}(\gamma) + |r(\gamma)| \leq -\chi(\gamma)$ où $r(\gamma)$ est l'enroulement² de γ relativement à S .*

Pour une démonstration de ce résultat, on pourra par exemple consulter [5].

1.6 Courbes transverses

Définition 1.23. *Une courbe transverse dans une variété de contact est une courbe transverse au champ de contact en tout point de V .*

Soient γ une courbe transverse, S une surface bordée par γ homologue à zéro et X une section non singulière de $\xi|_S$. On note γ_ε une courbe obtenue en poussant légèrement γ suivant X .

Définition 1.24. *On appelle autoenlacement de γ dans ξ et on note $l(\gamma)$ le nombre d'enlacement de γ et γ_ε .*

Lemme 1.25. *Soit C une courbe transverse simple fermée. Alors il existe un contactomorphisme d'un voisinage de C dans $D(0, \varepsilon) \times S^1$ (repéré en coordonnées cylindriques) muni de la structure de contact $dz + r^2 d\varphi = 0$, tel que l'image de C soit $\{0\} \times S^1$.*

Pour une démonstration de ce résultat, on pourra consulter [7].

² L'enroulement est le degré dans ξ orienté de la tangente orientée à γ par rapport à une section non singulière de $\xi|_S$

Chapitre 2

Surfaces dans les variétés de contact

Dans la suite, on ne considérera que des surfaces orientées plongées dans des variétés de contact avec la convention « normale d'abord ».

Soit S une surface. On considère un champ de vecteurs transverses à S . Son flot permet d'obtenir un difféomorphisme d'un voisinage de S dans $S \times]-\varepsilon, \varepsilon[$. L'image réciproque de l'équation de contact s'écrit alors sous la forme $\alpha(x, t) = \beta_t(x) + u_t(x)dt$, où pour tout t dans l'intervalle de définition, u_t est une fonction sur S et β_t est une 1-forme¹ sur S . Tout est bien sûr lisse.

La condition de contact a une forme particulière pour les équations de ce type. Après calcul elle devient :

$$u_t d\beta_t + \beta_t \wedge \left(du_t - \frac{\partial \beta_t}{\partial t} \right) > 0. \quad (\text{C})$$

Soit ω une forme volume sur S . Si $\beta_t = i_{Y_t} \omega$ on obtient² :

$$u_t \operatorname{div}_\omega Y_t - du_t \cdot Y_t + \frac{\partial \beta_t}{\partial t} \cdot Y > 0. \quad (\text{C}')$$

2.1 Feuilletages

2.1.1 Définition

Définition 2.1. *Un feuilletage singulier localement orientable \mathcal{F} sur une variété S de dimension 2 est la donnée d'une famille $\{U_i, X_i\}$ où $\{U_i\}$ est un recouvrement ouvert de S et pour tout i , X_i est un champ de vecteurs sur U_i vérifiant : pour tous i et j , il existe une fonction $f_{i,j} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{R}^*$ telle que sur $U_i \cap U_j$ on ait $X_i = f_{i,j} X_j$.*

On dit que le champ de vecteurs X dirige \mathcal{F} si pour tout i il existe une fonction $f_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^$ telle que sur U_i on ait $X_i = f_i X$.*

Considérons un feuilletage singulier localement orientable sur une surface S orientée par ω . Plaçons nous sur un ouvert U_i et définissons la 1-forme sur cet ouvert $\beta_i = i_{X_i} \omega$. Sur $U_i \cap U_j$ on a $\beta_i = f_{i,j} \beta_j$. Réciproquement on se donne une famille $\{U_i, \beta_i\}$, où $\{U_i\}$ est un recouvrement ouvert de S et pour tout i β_i est une 1-forme sur U_i , telle que pour tous i et j , il existe une fonction $f_{i,j} : U_i \cap U_j \rightarrow \mathbb{R}^*$ vérifiant $\beta_i = f_{i,j} \beta_j$ sur $U_i \cap U_j$. Alors l'équation $\beta_i = i_{X_i} \omega$ permet d'obtenir des champs de vecteurs sur les U_i vérifiant les hypothèses de la définition précédente. Ainsi, un feuilletage peut être défini soit par des champs de vecteurs soit par des 1-formes. La donnée d'un champ de vecteurs dirigeant \mathcal{F} est équivalente à la donnée d'une 1-forme définie sur S .

1. Nous sommes ici face à un abus de notation qui se répétera dans la suite du rapport : si β une 1-forme sur S et $\Pi : S \times \mathbb{R} \rightarrow S$ la projection sur S , on confond $\Pi^* \beta$ et β .

2. La divergence d'un champ de vecteur par rapport à une forme volume ω est l'unique fonction telle que $L_X \omega = (\operatorname{div}_\omega X) \omega$.

Proposition 2.2. Soient S une surface, β et β' deux 1-formes sur S qui tracent le même feuilletage et telles qu'en tout point singulier du feuilletage $d\beta \neq 0$ et $d\beta' \neq 0$. Alors il existe $u : S \rightarrow \mathbb{R}^*$ lisse telle que $\beta = u\beta'$.

La difficulté est de montrer le résultat au niveau des singularités du feuilletage. On utilise le lemme suivant :

Lemme 2.3. Soient U un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^2 repéré par les coordonnées (x, y) , f et g deux fonctions lisses de U dans \mathbb{R}^2 vérifiant $f(0) = g(0) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$. Alors il existe $U' =]-a, a[\times]-b, b[\subset U$, $u : U' \rightarrow \mathbb{R}$ lisse et $v :]-b, b[\rightarrow \mathbb{R}$ lisse tels que sur U' , $g = uf + v$.

Démonstration du lemme. Soit

$$\begin{aligned} \varphi : U &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) &\mapsto (f(x, y), y). \end{aligned}$$

La différentielle de φ est inversible en 0, donc quitte à restreindre U , on peut supposer que $\varphi : U \rightarrow U''$ est un difféomorphisme et $U'' =]-a', a'[\times]-b', b'[$ est un voisinage de 0 dans \mathbb{R}^2 . L'application φ permet de se ramener au cas où $f(x, y) = x$. Notons $g_1 = g \circ \varphi^{-1} : U'' \rightarrow \mathbb{R}^2$ et posons

$$\begin{aligned} u_1 : U'' &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \int_0^1 \frac{\partial g_1}{\partial x}(tx, y) dt \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} v_1 :]-b, b[&\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto g_1(0, y). \end{aligned}$$

On a alors $g_1 = u_1x + v_1$ et donc $g = u_1 \circ \varphi \cdot f + v_1$. □

Démonstration de la proposition. Soit $x_0 \in S$. Si x_0 est un point non singulier du feuilletage, alors sur un voisinage de x_0 le feuilletage est non singulier et il existe une unique fonction u qui ne s'annule pas telle que $\beta' = u\beta$.

Si x_0 est un point singulier du feuilletage tracé par β (et donc β') Il existe un difféomorphisme d'un voisinage de x_0 dans un voisinage U de 0 dans \mathbb{R}^2 , repéré par les coordonnées (x, y) , qui envoie x_0 sur 0. On transporte les 1-formes dans U . Elles s'écrivent sous la forme $\beta = f(x, y)dx + g(x, y)dy$ et $\beta' = f'(x, y)dx + g'(x, y)dy$ et vérifient $f(0) = g(0) = f'(0) = g'(0) = 0$. De plus on sait que $d\beta(0) \neq 0$ et $d\beta'(0) \neq 0$ par conséquent $\frac{\partial g}{\partial x}|_0 - \frac{\partial f}{\partial y}|_0 \neq 0$.

Supposons que $\frac{\partial g}{\partial x}|_0 \neq 0$ (l'autre cas se traite la même manière).

D'après le lemme, il existe $U' =]-a, a[\times]-b, b[\subset U$, $u : U' \rightarrow \mathbb{R}$ et $v :]-b, b[\rightarrow \mathbb{R}$ lisses tels que sur U' , $g' = ug + v$. Quitte à réduire U' , $C = \{(x, y), g(x, y) = 0\}$ est une courbe qui intersecte tous les segments $\{(x, y_0), x \in]-a, a[\}$ car $\frac{\partial g}{\partial x}|_0 \neq 0$. En tout point (x, y) de C , comme β et β' tracent le même feuilletage, on a $g'(x, y) = 0$ et donc $v(y) = 0$ ainsi v est nulle sur $]-b, b[$ et $g' = ug$. En tout point du feuilletage non singulier on a alors $f' = uf$ et comme les points singuliers forment au plus une courbe l'égalité est vérifiée partout. Par conséquent $\beta' = u\beta$.

Il reste à montrer que u est partout non nulle. Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in U'$ tel que $u(x) = 0$. Alors $\beta'(x) = 0$ et donc $\beta(x) = 0$. De plus

$$d\beta'(0) = du(0) \wedge \beta(0) + u(0)d\beta(0) = 0$$

ce qui contredit les hypothèses.

Comme la fonction u vérifiant $\beta' = u\beta$ est unique sur l'ensemble des points non singuliers du feuilletage et comme on connaît une telle fonction au voisinage des singularités c'est forcément la même et on peut prolonger u . □

Remarque. On peut montrer un résultat équivalent sur les champs de vecteurs définissant le même feuilletage.

Proposition 2.4. Soit S une surface à bord orientée. Alors il existe β une 1-forme sur S positive sur ∂S et telle que $d\beta$ est une forme volume.

On pourra consulter [8] pour trouver une description de la construction du feuilletage qui permet de définir β .

Théorème 2.5 (Peixoto). *Un champ de vecteurs sur une surface orientable fermée est C^∞ -génériquement de Morse-Smale³.*

Ce résultat est détaillé dans [14].

2.1.2 Feuilletage caractéristique

Soit S une surface plongée dans V . Soit $x \in S$. L'intersection entre $T_x S$ et ξ_x est un plan si $T_x S$ et ξ_x sont confondus et une droite sinon. Localement on peut diriger $T_x S \cap \xi_x$ par un champ de vecteurs qui est nul si $T_x S = \xi_x$ et non nul sinon. Les courbes intégrales sont alors des courbes legendriennes.

Définition 2.6. *Le feuilletage singulier ainsi obtenu est appelé feuilletage caractéristique de S .*

Si la surface S est orientée, on peut trouver un champ de vecteurs dirigeant son feuilletage caractéristique de la façon suivante. Soient ω une forme volume définissant l'orientation de S et α une équation de contact. On note α_0 la restriction de α aux plans tangents à S . Le champ de vecteurs Y tel que $i_Y \omega = \alpha_0$ est le champ de vecteurs cherché.

Sur $S \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ considérons la forme de contact $\alpha(x, t) = \beta_t(x) + u_t(x)dt$ où u_t est une fonction sur S et β_t est une 1-forme pour tout $t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$. Alors la restriction de α aux plans tangents à $S \times \{0\}$ est β_0 et tout champ de vecteurs X dirigeant le feuilletage caractéristique de $S \times \{0\}$ vérifie $i_X \beta_0 = 0$.

Définition 2.7. *Soient S une surface dans la variété de contact (V, ξ) et x un point critique du feuilletage caractéristique de S . Une singularité x est dite positive si les orientations de $T_x S$ et ξ_x sont les mêmes et négative dans le cas contraire.*

On peut montrer que les singularités du feuilletage caractéristique de type source sont des singularités positives et les singularités de type puits sont des singularités négatives. Par ailleurs, les singularités du feuilletage caractéristique sont toutes à divergence non nulle, en effet en une singularité x on a $T_x S = \xi_x$ donc $d\alpha|_{\xi_x} = d(i_Y \omega) = (\operatorname{div}_\omega Y)\omega$. Comme $d\alpha|_{\xi_x}$ est non dégénérée on a $\operatorname{div}_\omega Y \neq 0$ en x .

Définition 2.8. *Soit Y un champ de vecteurs sur une variété orientée par la forme ω . Un point singulier est dit isochore si $\operatorname{div}_\omega Y$ s'y annule.*

On a donc montré qu'un feuilletage caractéristique ne possède pas de singularité isochore. La réciproque est vraie.

Proposition 2.9. *Soient S une surface orientée plongée dans V et \mathcal{F} un feuilletage singulier tracé sur S et défini comme noyau d'une 1-forme β_0 . Alors \mathcal{F} est le feuilletage caractéristique induit sur S par un germe⁴ de structure de contact si et seulement si \mathcal{F} est sans singularités isochores.*

Démonstration. On a déjà montré un des sens de l'équivalence.

Supposons maintenant que \mathcal{F} est sans singularités isochores. Il existe un difféomorphisme d'un voisinage de S dans $S \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ qui envoie S sur $S \times \{0\}$. On construit une structure de contact sur $S \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ qui trace le feuilletage caractéristique \mathcal{F} sur $S \times \{0\}$. On cherche une équation de contact de la forme $\alpha(x, t) = \beta_t(x) + u_t(x)dt$, où β_t est, pour tout t , une 1-forme sur S , vérifiant $\beta_{t=0} = \beta_0$.

Soit ω une 2-forme définissant l'orientation de S . Il existe $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $d\beta_0 = u\omega$ et γ une 1-forme sur S telle que $\beta_0 \wedge \gamma$ soit une 2-forme positive par rapport à ω et strictement positive si $\beta_0 \neq 0$. On définit la 1-forme $\alpha(x, t) = \beta_0(x) + t(du(x) - \gamma(x)) + u(x)dt$. En $t = 0$, la condition de contact s'écrit $u d\beta_0 + \beta_0 \wedge \gamma \neq 0$ d'après (C). Elle se réécrit $u^2\omega + \beta_0 \wedge \gamma \neq 0$. Au niveau d'une singularité x , c'est-à-dire si $\beta_0(x) = 0$, comme \mathcal{F} est sans singularité isochore, on a $d\beta_0(x) \neq 0$ et donc $u(x) \neq 0$. Soit $x \in S$, si $\beta_0(x) = 0$ alors $u(x) \neq 0$ et $u^2\omega + \beta_0 \wedge \gamma \neq 0$. Si $\beta_0(x) \neq 0$ alors $\beta_0 \wedge \gamma > 0$ et $u^2\omega + \beta_0 \wedge \gamma \neq 0$. Donc α est une équation de contact au voisinage de $S \times \{0\}$. Elle trace le feuilletage \mathcal{F} sur $S \times \{0\}$. \square

3. voir la définition 2.16

4. Pour définir un germe, on définit une relation d'équivalence sur les champs de plans au voisinage d'un ensemble E : deux champs sont équivalents s'ils coïncident sur un voisinage de l'ensemble E . On appelle germe une classe d'équivalence.

Par ailleurs, le feuilletage caractéristique sur une surface détermine le germe de la structure de contact le long de la surface, comme le montre le théorème suivant.

Théorème 2.10. *Soit S une surface compacte plongée dans V . Deux germes de structures de contact qui induisent le même feuilletage caractéristique sur S sont conjugués par un germe de difféomorphisme isotope à l'identité parmi les difféomorphismes préservant le feuilletage.*

Démonstration. On veut appliquer la méthode de Moser, pour cela il faut construire un chemin lisse d'équations de contact adapté.

Il existe un difféomorphisme d'un voisinage de S dans $S \times]-\varepsilon, \varepsilon[$. On transporte les deux structures de contact. Elles admettent des équations de la forme $\alpha(x, t) = \beta_t(x) + u_t(x)dt$ et $\alpha'(x, t) = \beta'_t(x) + u'_t(x)dt$ où pour tout t , β_t et β'_t sont des 1-formes sur S et $u_t : S \rightarrow \mathbb{R}$, $u'_t : S \rightarrow \mathbb{R}$.

Les deux 1-formes β_0 et β'_0 tracent le même feuilletage sur S , de plus la condition de contact (C) impose qu'au niveau d'une singularité du feuilletage $d\beta_0$ et $d\beta'_0$ soient non nulles. Par conséquent, d'après le lemme 2.2, il existe $u : S \rightarrow \mathbb{R}^*$ telle que $\beta_0 = u\beta'_0$. Donc, quitte à multiplier α par u , on peut supposer que $\beta_0 = \beta'_0$. On considère alors la 1-forme

$$\alpha^s(x, t) = s\alpha(x, t) + (1-s)\alpha'(x, t) = \beta_t(x) + u_t^s(x)dt.$$

La condition de contact pour $t = 0$ s'écrit d'après (C)

$$u_0^s \wedge d\beta_0 + \beta_0 \wedge \left(du_0^s - \frac{\partial \beta_t}{\partial t} \Big|_{t=0} \right) > 0.$$

Elle devient en développant :

$$s \left(u_0 \wedge d\beta_0 + \beta_0 \wedge \left(du_0 - \frac{\partial \beta_t}{\partial t} \Big|_{t=0} \right) \right) + (1-s) \left(u'_0 \wedge d\beta_0 + \beta_0 \wedge \left(du'_0 - \frac{\partial \beta_t}{\partial t} \Big|_{t=0} \right) \right) > 0.$$

On retrouve les deux conditions de contact de α et α' , donc la condition de contact est vérifiée pour tout s , et α_s est une équation de contact. On note ξ_s la structure induite par α_s . Il est clair que les équations de contact α_s définissent le même feuilletage sur $S \times \{0\}$ car $\beta_0 = \beta'_0$.

Soient $x \in V$ et $t \in [0, 1]$. On pose $\mu_s = \frac{\partial \alpha_s}{\partial s}(R_s)$. La forme bilinéaire $d\alpha_s(x)$ restreinte à $\xi_s(x)$ est non dégénérée et $\mu_s(x)\alpha_s(x) - \frac{\partial \alpha_s}{\partial s}(x)$ est une forme linéaire sur $\xi_s(x)$. Donc il existe $X_s(x) \in \xi_s(x)$ tel que $\mu_s(x)\alpha_s(x) - \frac{\partial \alpha_s}{\partial s}(x) = i_{X_s(x)}d\alpha_s(x)$ sur $\xi(x)$. La même relation est vraie sur $R_s(x)$ donc par linéarité elle est vérifiée sur tout $T_x V$. Le champ de vecteurs X_s obtenu est lisse.

Il faut maintenant montrer que son flot ψ_s est défini jusqu'au temps 1 au voisinage de $S \times \{0\}$. Pour cela on montre que le champ de vecteurs X_s est tangent à $S \times \{0\}$ en tout point de $S \times \{0\}$. Soient $x \in S$ et $v \in \xi_s(x, 0) \cap T_{(x, 0)}(S \times \{0\})$. On sait que $\alpha_s(x, 0)(v) = 0$ et que $\frac{\partial \alpha_s}{\partial s}(x)(v) = \alpha_0(x)(v) - \alpha_1(x)(v)$ est proportionnelle à dt et donc nulle sur v . Par conséquent $d\alpha_s(X_s, v) = 0$. Donc $\alpha_s \wedge d\alpha_s(R_s, X_s, v) = 0$ et les vecteurs (R_s, X_s, v) ne sont pas indépendants. On obtient ainsi que v et $X_s(x)$ sont colinéaires et donc

$$X_s(x) \in \xi_s(x, 0) \cap T_{(x, 0)}S \times \{0\}.$$

Par conséquent, si on restreint X_s à $S \times \{0\}$, comme S est compacte, le flot est défini pour tout temps. Donc le flot est défini jusqu'au temps 1 pour un voisinage de $S \times \{0\}$. On peut alors appliquer le lemme de Moser et obtenir une famille lisse de difféomorphismes ψ_s avec $s \in [0, 1]$, tels que pour tout $s \in [0, 1]$, $\psi_s^* \xi_s = \xi_0$.

Il est de plus clair que ψ_1 est isotope à l'identité et qu'il préserve $S \times \{0\}$ ainsi que le feuilletage. \square

2.2 Convexité en topologie de contact

2.2.1 Définition

Définition 2.11. *Soit S une surface close orientée. On suppose que V est close. Alors S est ξ -convexe s'il existe champ de vecteurs X dont le flot préserve ξ et qui est transversal à S , c'est-à-dire que S est ξ -convexe s'il existe un champ de contact transversal à S .*

Exemple. On se place dans \mathbb{R}^3 muni de la structure $\alpha = dz + ydx - xdy$ (c'est la structure définie par la 1-forme $dz - r^2 d\theta$ en coordonnées cylindriques). La sphère $S^2 = \{(x, y, z), x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ est convexe. En effet, le champ de vecteurs $X(x, y, z) = (x, y, 2z)$ est transversal à S^2 et est un champ de contact. Son flot $\varphi_t(x, y, z) = (\exp(t)x, \exp(t)y, \exp(2t)z)$ vérifie $\varphi_t^* \alpha = \exp(2t)\alpha$.

En utilisant le flot de X on peut construire un difféomorphisme d'un voisinage U de S dans $S \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ sur lequel la structure de contact est verticalement invariante. Le théorème de Lieberman nous permet même de prolonger X à toute la variété. Comme la variété est compacte sans bords, le flot est défini pour tout temps et on obtient un difféomorphisme d'un voisinage de S dans $S \times \mathbb{R}$ où la structure transportée est verticalement invariante. L'équation de contact peut alors s'écrire $\alpha(x, t) = \beta(x) + u(x)dt$ où $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ et β est une 1-forme sur S . Le feuilletage caractéristique est constitué des noyaux de β .

La propriété de convexité se transmet par contactomorphisme. Soient deux variétés de contact (V_1, ξ_1) et (V_2, ξ_2) conjuguées par φ . L'image d'une surface convexe S pour ξ_1 est convexe pour ξ_2 , et le feuilletage caractéristique de $\varphi(S)$ est l'image par φ du feuilletage caractéristique de S .

2.2.2 Découpage

Définition 2.12. Soient S une surface dans une variété de dimension 3 et \mathcal{F} un feuilletage singulier localement orientable tracé sur S . Une multicourbe Γ tracée sur S découpe \mathcal{F} s'il existe une partition $S_+ \amalg S_-$ de $S \setminus \Gamma$, un champ de vecteurs Y qui dirige le feuilletage et une forme volume ω tels que $\operatorname{div}_\omega Y > 0$ sur S_+ , $\operatorname{div}_\omega Y < 0$ sur S_- et Y est sortant de S_+ . Une telle courbe Γ est appelée une courbe de découpage.

En fait, on peut fixer la forme volume quitte à changer le champ de vecteurs car pour tout fonction f strictement positive $\operatorname{div}_{f\omega} Y = \frac{1}{f} \operatorname{div}_\omega fY$.

Remarque. S_+ ou S_- sont rarement connexes. Les surfaces S_+ et S_- sont des réunions de composantes connexes de $S \setminus \Gamma$.

Théorème 2.13. Soient S une surface plongée dans V et \mathcal{F} son feuilletage caractéristique. La surface S est ξ -convexe si et seulement s'il existe une courbe Γ qui découpe \mathcal{F} .

De plus, si S est convexe et si X est un champ de contact transversal à S alors on peut prendre $\Gamma = \{x \in S, X(x) \in \xi(x)\}$. On parle alors de découpage associé à X .

Enfin, si la variété est $S \times \mathbb{R}$ avec pour équation de contact l'équation verticalement invariante $\alpha = \beta + udt$, on peut choisir $\Gamma = \{x \in S, u(x) = 0\}$.

Dans le dernier cas particulier du théorème, la condition de contact donnée par (C) est $\beta \wedge du + u d\beta > 0$. En un point de Γ elle s'écrit $\beta \wedge du > 0$, ce qui implique que du est surjective; par conséquent Γ est bien une sous-variété de dimension 1.

Les deux cas particuliers du théorème fournissent la même courbe de découpage. En effet, l'ensemble $\{x \in F, u(x) = 0\}$ est l'ensemble des points pour lesquels le champ de contact $\frac{\partial}{\partial t}$ appartient au plan de contact. Réciproquement, soit X un champ de contact transverse à S , alors le flot de X permet d'obtenir un difféomorphisme d'un voisinage de S dans $S \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ sur lequel la structure de contact est verticalement invariante et qui envoie X sur $\frac{\partial}{\partial t}$. La structure de contact s'écrit alors $\alpha(x, t) = \beta(x) + u(x)dt$ où $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ et β est une 1-forme sur S . On a $\Gamma = \{x \in S, u(x) = 0\}$.

Exemple. Reprenons l'exemple de S^2 dans \mathbb{R}^3 muni de $\alpha = dz + ydx - xdy$. L'équateur est une courbe de découpage : c'est l'ensemble des points pour lesquels le champ de contact $X(x, y, z) = (x, y, 2z)$ est inclus dans le plan de contact.

Démonstration du théorème 2.13. Supposons que S est convexe. Il existe un voisinage de S qui est difféomorphe à $S \times \mathbb{R}$ et tel que la structure induite soit de la forme $\alpha(x, t) = \beta(x) + u(x)dt$ où $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ et β est une 1-forme sur S . Montrons que $\Gamma = \{x \in F, u(x) = 0\}$ est une courbe de découpage pour $S \times \{0\}$. On note $S_+ = \{x \in S, u(x) > 0\}$ et $S_- = \{x \in S, u(x) < 0\}$. On pose $\omega = \beta \wedge du + u d\beta$, c'est une forme volume sur S d'après l'équation de contact (C). Soit Y tel que $i_Y \omega = \beta$, le champ de vecteurs Y dirige le feuilletage. Pour $x \in \Gamma$, la condition de contact (C') donne $-du(x) \cdot Y > 0$. Par conséquent Γ est transversal au feuilletage et Y est sortant de S_+ .

On cherche Ω telle que $\operatorname{div}_\Omega Y > 0$ sur S_+ , $\operatorname{div}_\Omega Y < 0$ sur S_- . Sur S_+ , on pose $\omega_+ = \frac{1}{u}\omega$ et sur S_- on pose $\omega_- = -\frac{1}{u}\omega$. On a alors

$$\operatorname{div}_{\omega_+} Y = \frac{1}{u^2}(-du \wedge \beta + u d\beta)$$

et

$$\operatorname{div}_{\omega_-} Y = \frac{1}{u^2}(du \wedge \beta - u d\beta).$$

Par conséquent sur S_+ on a $\operatorname{div}_{\omega_+} Y > 0$ et sur S_- on a $\operatorname{div}_{\omega_-} Y < 0$. Il ne reste qu'à lisser les formes ω_+ et ω_- au voisinage de Γ pour obtenir Ω .

Il existe un voisinage A de Γ et un difféomorphisme de A dans $\Gamma \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ qui envoie Y sur $\frac{\partial}{\partial t}$. Sur $S \setminus A$, on pose $\Omega = \frac{1}{|u|}\omega$. Sur A , on prend les coordonnées (t, s) sur $\Gamma \times]-\varepsilon, \varepsilon[$. Soit $\omega_0 = dt \wedge ds$. Au voisinage du bord de A , on écrit $\Omega = f(t, s)\omega_0$. On veut prolonger f sur tout A . Comme $\operatorname{div}_\Omega Y \Omega = \frac{\partial f}{\partial s}\omega_0$, on voit que le signe de la divergence est déterminé par le signe $\frac{\partial f}{\partial s}$, prolonger f pour obtenir une fonction strictement positive et qui vérifie la bonne condition sur $\frac{\partial f}{\partial s}$ ne pose pas de problème. On peut donc prolonger Ω sur A .

Réciproquement, supposons maintenant qu'il existe une courbe de découpage Γ pour \mathcal{F} . On reprend les notations S_+ , S_- , Y et ω de la définition. On veut montrer que S est convexe. Pour cela, on prend un voisinage de S difféomorphe à $S \times \mathbb{R}$ et on transporte la structure de contact et le feuilletage. On note toujours ξ et \mathcal{F} les images de ξ et \mathcal{F} . On montre qu'il existe une structure ξ' verticalement invariante sur $S \times \mathbb{R}$ qui trace sur $S \times \{0\}$ le feuilletage \mathcal{F} . Pour cette structure $S \times \{0\}$ est donc convexe. D'après le théorème 2.10 les deux structures ξ et ξ' sont conjuguées par un difféomorphisme qui préserve $S \times \{0\}$ et \mathcal{F} . Par conséquent, $S \times \{0\}$ est aussi convexe pour la structure ξ .

On se place donc sur $S \times \mathbb{R}$ et on cherche une structure de contact verticalement invariante de la forme $\alpha(x, t) = \beta(x) + u(x)dt$ avec β une 1-forme sur S et $u : S \rightarrow \mathbb{R}$ qui trace le feuilletage \mathcal{F} sur $S \times \{0\}$. Il existe un voisinage A de Γ et un difféomorphisme de A dans $\Gamma \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ qui envoie Y sur $\frac{\partial}{\partial t}$. On pose $\beta = i_Y \omega$.

En dehors de A , sur S_+ on prend $u = 1$ et sur S_- on prend $u = -1$. La forme α obtenue est bien de contact : (C) se reformule par $d\beta > 0$ sur S_+ et $d\beta < 0$ sur S_- . Or $\operatorname{div}_\omega Y = d\beta$ et donc la condition de contact est toujours vérifiée.

Sur A , d'après (C) on cherche une fonction u vérifiant l'inégalité $u(t, s) \operatorname{div}_\omega Y(s, t) - \frac{\partial u}{\partial s} > 0$ et valant 1 pour s proche de ε et -1 pour s proche de $-\varepsilon$ pour avoir une équation de contact. Cherchons u sous la forme

$$u(t, s) = v(s) \exp\left(\int_0^s \operatorname{div}_\omega Y(t, u) du\right).$$

L'inéquation devient

$$-v'(s) \exp\left(\int_0^s \operatorname{div}_\omega Y(t, u) du\right) > 0.$$

Il suffit de prendre v strictement décroissante et telle que $v(0) = 0$ pour que $\alpha = \beta + udt$ soit une structure de contact verticalement invariante qui trace le feuilletage \mathcal{F} sur $S \times \{0\}$. \square

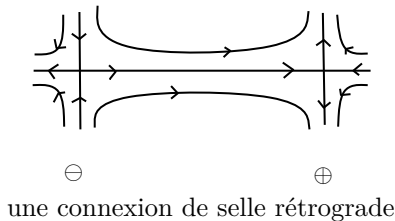
Remarque. Soit une surface compacte convexe S munie d'une courbe de découpage Γ , alors il existe un champ de contact X tel que Γ soit le découpage associé à X .

Proposition 2.14. *Soit S une surface convexe dans une variété de contact. Deux coupages d'un même feuilletage caractéristique \mathcal{F} de S sont isotopes parmi les coupages.*

Démonstration. Soit U un voisinage de S difféomorphe à $S \times \mathbb{R}$ sur lequel la structure de contact est verticalement invariante, on la note $\alpha(x, t) = \beta(x) + u(x)dt$, où β est une 1-forme sur S . Soit $\Gamma = \{x \in S, u(x) = 0\}$, c'est une courbe de découpage. Considérons une seconde courbe Γ_1 et montrons que ces deux courbes sont isotopes. D'après la démonstration précédente, il existe $u_1 : S \rightarrow \mathbb{R}$ et β_1 une 1-forme sur S tels que $\alpha_1 = \beta_1 + u_1 dt$ soit une forme de contact et $\Gamma_1 = \{x \in S, u_1(x) = 0\}$. Le feuilletage tracé sur $S \times \{0\}$ par α_1 est \mathcal{F} . Quitte à multiplier α_1 par une fonction qui ne s'annule pas, on peut donc supposer que $\beta_1 = \beta$, d'après le lemme 2.2. L'équation $\alpha_s = s\alpha + (1-s)\alpha_1$ est toujours une équation de contact (d'après (C)) de courbe de découpage $\Gamma_s = \{x \in S, u_s(x) = 0\}$. C'est l'isotopie cherchée. \square

2.2.3 Surfaces convexes et feuilletage

La convexité contraint le feuilletage caractéristique d'une surface à ne pas posséder certaines connexions de selles⁵ : les connexions de selles rétrogrades. Une *connexion de selles rétrograde* est une orbite du feuilletage caractéristique joignant une selle qui est une singularité négative, à une selle qui est une singularité positive.



Proposition 2.15. *Le feuilletage caractéristique d'une surface convexe S dans une variété de contact ne possède pas de connexion de selles rétrograde.*

Démonstration. On se place dans un voisinage de S diffeomorphe à $S \times \mathbb{R}$. Sur $S \times \mathbb{R}$, l'équation de contact s'écrit $\alpha(x, t) = \beta(x) + u(x)dt$ où β est une 1-forme sur S . Supposons qu'il existe une connexion de selles rétrograde entre x_0 et x_1 , on note φ l'orbite entre les deux selles. Comme x_0 est une singularité négative, on a $u(x_0) < 0$, et comme x_1 est positive $u(x_1) > 0$. Soient ω qui oriente S et Y vérifiant $i_Y \omega = \beta$. La condition de contact s'écrit $u \operatorname{div}_\omega Y - du(Y) > 0$ d'après (C). En un point x tel que $u(x) = 0$ on a donc $-du(Y) > 0$. Donc $u \circ \varphi(t)$ est négative pour t proche de $-\infty$, positive pour t proche de $+\infty$ et ne peut s'annuler qu'en décroissant. On a une contradiction. \square

En réalité, cette condition est presque suffisante comme le montre le théorème 2.17 ci-dessous.

Définition 2.16. *Un feuilletage singulier est dit de Morse-Smale si ses singularités et feuilles fermées sont hyperboliques, si l'ensemble limite de toute demi-feuille est soit une singularité soit une feuille fermée et s'il n'y a pas de connexion de selles. On parle de feuilletage presque de Morse-Smale si les seules connexions de selles interdites sont les connexions de selles rétrogrades.*

Théorème 2.17. *Soit S une surface compacte dans une variété de contact. Si son feuilletage caractéristique est presque de Morse-Smale alors S est convexe.*

Démonstration. On va construire une courbe de découpage sur S , on aura ainsi la convexité. On commence par construire une surface $S' \subset S$ qui contient toutes les singularités et les orbites périodiques. On place un disque autour des nœuds, un anneau autour des orbites périodiques et une bande autour des séparatrices stables des selles positives et instables des selles négatives. On peut les recoller pour former une surface régulière pour laquelle le champ Y est transverse au bord.

Sur $S \setminus S'$, il n'y a aucune singularité. Soit A une composante connexe de $S \setminus S'$, l'indice de Y sur ∂A est 0 donc A est un anneau et Y est sortant sur un des bords et rentrant sur l'autre. En suivant le flot, on construit un diffeomorphisme de A dans

$$A' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, 1 < \sqrt{x^2 + y^2} < 2\}$$

qui transporte Y sur $\frac{\partial}{\partial r}$. On transporte dans A le cercle de rayon $\frac{3}{2}$. On effectue cette opération pour toutes les composantes et on note Γ la courbe obtenue. Chaque composante connexe de S' ne contient que des singularités de même type (positives ou négatives). En effet, les bandes ajoutées autour des séparatrices des selles lors de la construction de S' ne relient que des singularités de même signe : puits et selle négative, source et selle positive ou deux selles de même signe (car il n'y a pas de connexion de selle rétrograde). On note S'_+ l'ensemble des composantes où les singularités sont positives et S'_- l'ensemble des composantes où elles sont négatives. On a déjà Y , il faut construire ω . On prend ω tel que la divergence de Y soit toujours positive sur S'_+ et négative sur S'_- . Il ne reste plus qu'à prolonger ω , on procède comme pour la démonstration précédente. \square

5. Une connexion de selles est une orbite joignant deux selles.

Théorème 2.18. *Soit S une surface plongée dans une variété de contact. On peut rendre S convexe par une isotopie C^∞ -petite.*

Démonstration. D'après le théorème de Peixoto (théorème 2.5), un champ de vecteurs sur une surface orientable fermée est C^∞ -génériquement de Morse-Smale. Comme la condition de contact est une condition ouverte et d'après le théorème de Gray (théorème 1.8), il existe une isotopie C^∞ -proche de l'identité joignant la structure ξ à une structure de contact qui trace un feuilletage de Morse-Smale sur S . L'inverse de cette isotopie est l'isotopie cherchée. \square

Théorème 2.19. *Soit S une surface compacte. Soient ξ_0 et ξ_1 deux structures de contact verticalement invariantes sur $S \times \mathbb{R}$ qui induisent le même feuilletage \mathcal{F} sur $S \times \{0\}$. Alors ξ_0 et ξ_1 sont conjuguées par un difféomorphisme de la forme $\varphi \times \text{Id}$ où φ est un difféomorphisme de S isotope à l'identité parmi les difféomorphismes préservant \mathcal{F} . De plus si le découpage de $S \times \{0\}$ associé au champ vertical est le même pour les deux structures alors il est préservé par l'isotopie.*

Démonstration. Les structures ξ_0 et ξ_1 admettent des équations de la forme $\alpha_i(x, t) = \beta_i(x) + u_i(x)dt$, où β_i est une 1-forme sur S définissant le feuilletage et $u_i : S \rightarrow \mathbb{R}$. D'après le lemme 2.2, on peut supposer $\beta_0 = \beta_1$. Les 1-formes $\alpha_s = s\alpha_0 + (1-s)\alpha_1$ sont de contact d'après (C). La démonstration du théorème 2.10 utilisant la méthode de Moser s'adapte ici sans difficulté. De plus, si les découpages définis par u sont les mêmes alors c'est le cas pour tous les découpages intermédiaires. Enfin le champ X_s obtenu par la méthode de Moser est verticalement invariant et n'a pas de composante selon $\frac{\partial}{\partial t}$, par conséquent le champ $\frac{\partial}{\partial t}$ est invariant par le flot de X_s . \square

Ce théorème s'étend aux surfaces convexes difféomorphes dans deux variétés de contact.

Théorème 2.20. *On considère deux surfaces convexes compactes S_1 et S_2 dans deux variétés de contact V_1 et V_2 et deux champs de contact associés X_1 et X_2 . S'il existe un difféomorphisme de S_1 dans S_2 qui respecte les orientations et envoie un feuilletage sur l'autre alors il existe un germe de difféomorphisme de contact qui envoie S_1 sur S_2 et X_1 sur X_2 .*

Démonstration. Grâce au flot des champs de contact, on construit deux difféomorphismes de voisinages de S_1 et S_2 dans $S_1 \times \mathbb{R}$ et $S_2 \times \mathbb{R}$, les champs de contacts sont alors envoyés sur $\frac{\partial}{\partial t}$. Grâce au difféomorphisme entre les surfaces on obtient un difféomorphisme de $S_1 \times \mathbb{R}$ sur $S_2 \times \mathbb{R}$. En transportant la structure définie sur $S_1 \times \mathbb{R}$ on obtient alors deux structures dans $S_2 \times \mathbb{R}$ qui tracent le même feuilletage caractéristique. On applique alors le théorème précédent pour obtenir un germe de difféomorphisme φ isotope à l'identité qui conjugue les deux structures sur $S_2 \times \mathbb{R}$. On compose alors φ avec les difféomorphismes évoqués précédemment dans la démonstration pour obtenir un germe de difféomorphisme ψ de V_1 dans V_2 . Comme $\frac{\partial}{\partial t}$ est invariant par φ , X_1 est envoyé sur X_2 par ψ . \square

2.2.4 Modification du feuilletage caractéristique

Dans cette section on se demande si on peut déformer une surface convexe S pour obtenir comme feuilletage caractéristique de S un autre feuilletage singulier.

Définition 2.21. *Soit X un champ de contact transversal à S . Une isotopie de $S \rightarrow V$ est admissible si c'est une isotopie à travers des surfaces transversales à X .*

Théorème 2.22. *Soient S une surface convexe compacte dans une variété de contact et X un champ de contact transversal à S . On note Γ la courbe de découpage du feuilletage caractéristique de S associée à X . Soit \mathcal{F} un feuilletage singulier localement orientable découpé par Γ . Alors il existe une isotopie admissible $\delta_s : S \rightarrow V, s \in [0, 1]$, telle que $\delta_s(S)$ soit C^0 -proche de S et le feuilletage caractéristique de $\delta_1 S$ soit $\delta_1 \mathcal{F}$. De plus, pour tout s , le découpage associé à X de $\delta_s(S)$ est $\delta_s(\Gamma)$.*

Démonstration. La démonstration repose sur la méthode de Moser, nous allons donc commencer par construire une famille d'équations de contact adaptée.

On oriente S par une forme ω . Le flot du champ X fournit un difféomorphisme d'un voisinage de S (aussi petit que l'on veut) dans $S \times \mathbb{R}$ tel que, sur $S \times \mathbb{R}$, l'image de la

structure de contact ait pour équation $\alpha_0(x, t) = \beta(x) + u(x)dt$ où β est une 1-forme sur S et $u : S \rightarrow \mathbb{R}$.

On note le feuilletage caractéristique \mathcal{F}_0 . La courbe de découpage Γ sépare S en S_+ et S_- . On note ω_1 et Y_1 une 2-forme et un champ de vecteurs tels que Y_1 dirige \mathcal{F} , dilate ω_1 sur S_+ et la contracte sur S_- .

Soit A un voisinage de Γ tel qu'il existe un difféomorphisme de A dans $\Gamma \times]-1, 1[$ vérifiant les conditions suivantes

- l'image de \mathcal{F}_0 est constituée des segments $\{(t, u), u \in]-1, 1[\}$;
- pour tout $t \in \Gamma$ la feuille de l'image de \mathcal{F} passant par $(t, 0)$ est un graphe au-dessus du segment $\{(t, u), t \in]-1, 1[\}$.

Notons $A_- = A \cap S_-$ et $A_+ = A \cap S_+$.

Sur $((S \setminus A) \cap S_+) \times \mathbb{R}$, en divisant α par une fonction strictement positive on écrit une équation de ξ_0 sous la forme $\alpha = i_{Y_0}\omega + dt$. La condition de contact (C') impose $\text{div}_\omega Y_0 > 0$. Quitte à multiplier Y_1 par une fonction strictement positive on peut supposer que $\omega_1 = \omega$. On pose alors $Y_s = sY_0 + (1-s)Y_1$, les 1-formes $\alpha_s = i_{Y_s}\omega + dt$ sont des équations de contact d'après (C).

De même, sur $((S \setminus A) \cap S_-) \times \mathbb{R}$ on écrit une équation de ξ_0 sous la forme $\alpha = i_{Y_0}\omega - dt$. La condition de contact (C') impose $\text{div}_\omega Y_0 < 0$. On peut supposer que $\omega_1 = \omega$ et on pose $Y_s = sY_0 + (1-s)Y_1$, les 1-formes $\alpha_s = i_{Y_s}\omega - dt$ sont des équations de contact d'après (C).

Sur $A \times \mathbb{R}$, on prolonge Y_0 et Y_1 en des champs dirigeant \mathcal{F}_0 et \mathcal{F} . On écrit une équation de ξ sous la forme $\alpha_0(x, t) = i_{Y_0}\omega + u_0(x)dt$ avec $u_0 = 1$ au voisinage de ∂A_+ et $u_0 = -1$ au voisinage de ∂A_- . On pose alors $Y_s = sY_0 + (1-s)Y_1$. On cherche u_s , $s \in [0, 1]$ tels que les 1-formes $\alpha_s = i_{Y_s}\omega + u_s dt$ soient de contact, que $u_s = 1$ au voisinage de ∂A_+ et $u_s = -1$ au voisinage de ∂A_- . La condition de contact à vérifier est $u_s \text{div}_\omega Y_s - du(Y_s) > 0$ d'après l'équation (C').

Considérons $A \times [0, 1]$ muni du champ de vecteurs $Y(x, s) = Y_s(x)$. D'après le théorème de la boîte de flot, il existe un difféomorphisme f de $A \times [0, 1]$ dans $\Gamma \times]-\varepsilon, \varepsilon[\times [0, 1]$, muni des coordonnées (t, u, s) , tel que l'image de Y soit $\frac{\partial}{\partial u}$ et qui envoie $A \times \{s\}$ sur $\Gamma \times]-\varepsilon, \varepsilon[\times \{s\}$. Le problème précédent se ramène alors à trouver une fonction $U : \Gamma \times]-\varepsilon, \varepsilon[\times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $U(\cdot, \cdot, 0) = u_0 \circ f^{-1}$, $U = 1$ pour u proche de ε , $U = -1$ pour u proche de $-\varepsilon$ et $U(t, u, s) \text{div}_\omega \partial u - \frac{\partial U}{\partial u}(t, s, u) > 0$. On cherche U sous la forme

$$U(t, u, s) = V(t, u) \exp \int_0^u \text{div}_\omega \partial u \, dv.$$

L'équation devient $\frac{\partial V}{\partial u} < 0$. La condition est vérifiée pour $s = 0$ et u proche de 1 ou -1 . On prolonge V à $\Gamma \times]-\varepsilon, \varepsilon[\times [0, 1]$ ce qui est possible car V est positive pour u proche de 1 et négative pour u proche de -1 .

Les deux familles α_s construites se recollent bien. On obtient alors une famille d'équations de contact définies sur $S \times \mathbb{R}$. Sur $S \times \{0\}$, le feuilletage caractéristique induit par α_1 est \mathcal{F} .

Il existe un champ de vecteurs X_s verticalement invariant vérifiant $\mu_s \alpha_s = \frac{\partial \alpha_s}{\partial s} + i_{X_s} d\alpha_s$ avec $\mu_s = \frac{\partial \alpha_s}{\partial s}(R_s)$, où R_s est le champ de Reeb associé α_s (on utilise une méthode analogue à celle présentée dans la démonstration du théorème 2.10). Comme S est compacte et X_s est verticalement invariant, la dérivée de toute solution de l'équation différentielle $y'(t) = X_t(y(t))$ est bornée et par conséquent définie pour tout temps donc le flot φ_s de X_s est défini pour tout temps. On applique alors la méthode de Moser et on obtient $\varphi_s^* \xi_s = \xi_0$.

Posons $\delta_s = \varphi_{s|S \times \{0\}}^{-1}$. Sur $S \times \{0\}$, le feuilletage caractéristique induit par α_1 est \mathcal{F} . Par conséquent, le feuilletage caractéristique sur la surface $\delta_1(S \times \{0\}) = \varphi_1^{-1}(S \times \{0\})$ pour la structure de contact $\xi_0 = \varphi_1^{-1} \xi_1$ est $\varphi_s^{-1}(F) = \delta_1(F)$.

Comme X_s est invariant par translation selon $\frac{\partial}{\partial t}$, pour tous $s \in [0, 1]$, $x \in S$ et $t \in \mathbb{R}$ on a $\varphi_s((x, t)) = \varphi_s(x, 0) + t \frac{\partial}{\partial t}$. Par conséquent, le flot φ_s préserve $\frac{\partial}{\partial t}$ pour tout s . Donc $\varphi_s^{-1}(S \times \{0\})$ est transverse à $\frac{\partial}{\partial t}$ pour tout s et $\frac{\partial}{\partial t}$ est toujours un champ de contact pour $\varphi_s^{-1}(S \times \{0\})$. Pour tout s , φ_s^{-1} établit un contactomorphisme entre $S \times \mathbb{R}$ muni de la structure ξ_s et $S \times \mathbb{R}$ muni de la structure ξ_0 . Pour la structure de contact ξ_s , la surface $S \times \{0\}$ est découpée par Γ , donc $\delta_s(\Gamma)$ découpe $\delta_s(S \times \{0\})$. \square

Remarque. Si on modifie le champ de vecteurs X_s loin des surfaces $\delta_s(S)$ de façon lisse pour obtenir un champ nul pour t grand, l'isotopie φ_s^{-1} s'étend à toute la variété V .

Corollaire 2.23 (Lemme de réalisation). *Soient S une surface convexe dans une variété de contact, Γ une courbe de découpage de S et K une courbe tracée sur S . On suppose que chaque composante de $S \setminus K$ rencontre Γ . Alors il existe une isotopie admissible $\delta_s : S \rightarrow V, s \in [0, 1]$ telle que $\delta_s(S)$ soit C^0 -proche de S et $\delta_1(K)$ soit legendrienne et tracée sur $\delta_1(S)$. De plus, pour tout s , $\delta_s(\Gamma)$ est une courbe de découpage de $\delta_s(S)$.*

La démonstration repose sur la construction sur S d'un feuilletage adapté à Γ pour lequel K est une réunion de feuilles. On applique ensuite le théorème précédent. Pour plus de détails on pourra consulter [11].

Théorème 2.24. *Soit (V, ξ) une variété de contact tendue. Soient S une surface convexe et Γ une courbe de découpage de S . Alors*

- si $S = S^2$, Γ n'a qu'une composante connexe
- si $S \neq S^2$, aucune composante de $S \setminus \Gamma$ n'est un disque.

Démonstration. Supposons $S = S^2$. Si ξ est tendue alors ξ est isotope à la structure standard sur la sphère et ses courbes de découpage n'ont qu'une seule composante connexe.

Supposons $S \neq S^2$. Si une composante de $S \setminus \Gamma$ est un disque D alors il existe un feuilletage \mathcal{F} adapté à Γ tel que D contienne un disque D' ayant pour bord une orbite périodique de \mathcal{F} . On utilise alors le théorème précédent pour trouver une isotopie de S notée δ_s pour laquelle $\delta_1(\mathcal{F})$ est le feuilletage caractéristique de $\delta_1(S)$. L'invariant de Thurston-Bennequin de $\partial D'$ est nul. On obtient ainsi un disque vrillé et la structure est donc vrillée. \square

2.3 Le cas des surfaces à bord

On peut se demander si la notion de convexité peut avoir un sens pour les surfaces à bord et si on peut retrouver les propriétés des surfaces sans bord. La définition ne semble pas poser de problème, en effet, un champ de contact transverse a un sens pour les surfaces à bord. Cependant le cadre naturel est celui des surfaces à bord legendrien d'invariant de Thurston-Bennequin négatif pour pouvoir garantir la généricité des surfaces convexes.

Théorème 2.25. [11] *Soit S une surface à bord legendrien d'invariant de Thurston-Bennequin négatif, alors il existe une surface convexe C^0 -proche de S et ayant le même bord.*

2.4 Les variétés à bord

Soit V une variété à bord. La différentielle d'une forme différentielle sur V a un sens sur le bord. On peut donc définir une structure de contact de la même manière que pour les variétés sans bord. Les définitions de courbe legendrienne, transverse, de surface convexe données dans ce chapitre s'étendent aux variétés à bord.

La définition des structures tendues ou vrillées nécessite d'être un peu détaillée, en effet il faut préciser quels sont les comportements autorisés pour les disques vrillés au niveau du bord de V .

Définition 2.26. *On dit qu'une variété de contact à bord (V, ξ) est tendue si elle est la restriction d'une variété tendue (V', ξ') c'est à dire si V' est un élargissement de V et $\xi'_V = \xi$.*

Théorème 2.27 (Eliashberg). [4] *L'espace des structures tendues sur le boule unité de \mathbb{R}^3 qui induisent un feuilletage donné sur le bord est faiblement contractile⁶.*

Soit S une surface orientée plongée dans une variété V . On note $V \wr S$ la variété obtenue en découpant V le long de S . On obtient une application $\pi : V \wr S \rightarrow V$ qui est un difféomorphisme sur $V \setminus S$ et induit le revêtement d'orientation sur S . La variété à coins $V \wr S$ est munie naturellement d'une structure de contact.

Théorème 2.28 (Colin). *Soient (V, ξ) une variété de contact de dimension 3 à bord et D un disque plongé dans V intersectant ∂V transversalement suivant $\partial D = \gamma$. Si γ est une courbe transverse à ξ d'autoenlacement -1 et si la structure sur la variété à coins $V \wr D$ est tendue, alors ξ est tendue sur V .*

6. Toute famille compacte se contracte en un point

Définition 2.29. Soit S une surface convexe à bord legendrien dans une variété de contact de courbe de découpage Γ . Une composante connexe γ de Γ est dite parallèle au bord si $S \setminus \gamma$ contient une composante connexe qui ne rencontre pas Γ .

La courbe de découpage Γ est dite parallèle au bord si toutes ses composantes connexes le sont.

Théorème 2.30. [12] Soient (V, ξ) une variété de contact de dimension 3 à bord et D un disque plongé dans V intersectant ∂V transversalement suivant $\partial D = \gamma$. Si γ est une courbe legendrienne, si une courbe de découpage de D est parallèle au bord et si la structure sur la variété à coins $V \setminus D$ est tendue, alors ξ est tendue sur V .

Chapitre 3

Livres ouverts

3.1 Définitions

Définition 3.1. Un livre ouvert sur une variété V est un couple (K, θ) où K est un entrelacs et θ est une application de $V \setminus K$ dans le cercle S^1 . On demande que θ soit une fibration, qu'il existe un voisinage U de K et un difféomorphisme $\varphi : U \rightarrow D(0,1) \times K$ tel que pour tout $x \in K$ on ait $\varphi(x) = (0, x)$ et que, si l'on munit $D(0,1)$ de coordonnées polaires (r, ψ) , alors $\theta \circ \varphi^{-1}(r, \psi, z) = \psi$.

L'entrelacs K est appelé la reliure. Une page est l'union d'une fibre et de la reliure.

Soit (K, θ) un livre ouvert sur une variété V . La fibration θ cooriente les pages et oriente aussi la reliure.

Exemple. La sphère S^3 admet les deux livres ouverts particulièrement utiles. Pour les décrire, on représente S^3 comme le cercle unité de $\mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2), z_1 \in \mathbb{C}, z_2 \in \mathbb{C}\}$.

1. On considère le livre ouvert de reliure $K_0 = \{(z_1, z_2) : r_2 = 0\}$ et de fibration

$$\begin{aligned} \theta_0 : \quad S^3 \setminus K_0 &\rightarrow S^1 \\ (r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) &\mapsto \theta_2. \end{aligned}$$

La reliure est un nœud trivial, et les pages sont des disques. De plus l'application

$$\begin{aligned} S^1 \times D(0,1) &\rightarrow S^3 \setminus \{(z_1, z_2) : r_1 = 0\} \\ (\theta_1, r_2, \theta_2) &\mapsto (\sqrt{1-r_2^2}, \theta_1, r_2, \theta_2) \end{aligned}$$

fournit la trivialisatation cherchée au voisinage de la reliure.

2. Soit (K_1, θ_1) le livre ouvert de reliure $K_1 = \{(z_1, z_2) : r_1 r_2 = 0\}$ et de fibration

$$\begin{aligned} \theta_1 : \quad S^3 \setminus K_1 &\rightarrow S^1 \\ (r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) &\mapsto \theta_1 + \theta_2. \end{aligned}$$

La reliure est un entrelacs de Hopf et les pages sont des anneaux. De plus l'application

$$\begin{aligned} S^1 \times D(0,1) &\rightarrow S^3 \setminus \{(z_1, z_2) : r_1 = 0\} \\ (\alpha, r, \theta) &\mapsto (\sqrt{1-r^2}, \alpha, r, \theta - \alpha) \end{aligned}$$

ainsi que l'application analogue en inversant z_1 et z_2 fournissent les trivialisations cherchées au voisinage des deux composantes connexes de la reliure.

En fait, toute variété close orientée de dimension 3 admet une décomposition en livre ouvert.

Proposition 3.2. [6] Un couple (K, θ) où K est un entrelacs et θ est une fibration de $V \setminus K$ dans le cercle S^1 est un livre ouvert si toute fibre est l'intérieur d'une surface compacte de bord K .

3.2 Livres ouverts et suspensions

Cette section présente un procédé de construction de livres ouverts dit *par suspension* à l'aide d'une surface à bord S et d'un difféomorphisme de cette surface h qui est l'identité au voisinage du bord. Le difféomorphisme h est appelé la *monodromie*.

Considérons la variété à bord V_h obtenue en identifiant $S \times \{0\}$ et $S \times \{1\}$ grâce à h vu comme difféomorphisme de $S \times \{1\}$ dans $S \times \{0\}$. Comme h est l'identité près du bord, le bord de V_h est $\partial S \times S^1$. Soit $W = \partial S \times D(0, 1)$, c'est une variété à bord, de bord $\partial S \times S^1$. On recolle ces deux variétés le long de leur bord par l'identité pour que

$$\begin{aligned} \theta : \quad V &\rightarrow S^1 \\ (x, t) \in V_h &\mapsto t \\ (z, r, \psi) \in W &\mapsto \psi \end{aligned}$$

soit un difféomorphisme.

On note V la variété obtenue, V est définie à difféomorphisme près. Le livre ouvert associé à V est le suivant : la reliure est constituée de $\partial S \times \{0\}$ dans W . L'application θ définie ci-dessus fournit la fibration.

Réciproquement, il est possible à partir d'un livre ouvert donné de trouver un difféomorphisme d'un page dans elle-même pour lequel la construction précédente fournisse une variété difféomorphe à celle de départ. Pour cela, on considère l'application premier retour sur une page du flot d'un champ de vecteurs transversal aux pages. Plus précisément on procède de la façon suivante :

On considère une variété V close et (K, θ) un livre ouvert sur V . Par définition de (K, θ) , il existe un voisinage U de K et un difféomorphisme $\varphi : U \rightarrow D(0, 1) \times K$ tel que pour tout $x \in K$ on ait $\varphi(x) = (0, x)$ et tel que si on munit $D(0, 1)$ de coordonnées polaires (r, ψ) , on ait $\theta \circ \varphi^{-1}(r, \psi, z) = \psi$ pour tout $(r, \psi, z) \in D(0, 1) \times K$.

Posons $U' = \varphi^{-1}(D(0, \frac{1}{2}) \times K)$. La variété $V' = V \setminus U'$ est une variété à bord de bord difféomorphe à $S^1 \times K$. Soit $S = \theta^{-1}(0) \cap V'$, c'est une surface à bord de bord difféomorphe à K . Soit X un champ de vecteurs sur V' non singulier, positivement transversal aux pages et qui vaut $\varphi^* \frac{\partial}{\partial \psi}$ au voisinage du bord. Notons Φ_t le flot de ce champ de vecteurs. Au voisinage du bord $\varphi \circ \Phi_t \circ \varphi^{-1}(r, \psi, z) = (r, \psi + t, z)$. Comme la variété est compacte, le flot est défini pour tout temps. L'application premier retour sur S est bien définie et vaut l'identité au voisinage du bord, on la note h . La variété à bord V' est difféomorphe à V_h . La construction d'une variété munie d'un livre ouvert par suspension en utilisant S et h redonne bien la variété V et le livre ouvert (K, θ) .

Définition 3.3. *Un twist de Dehn est une classe d'isotopie de difféomorphismes d'une surface dans elle-même qui valent l'identité en dehors d'un certain ouvert. On décrit ici un représentant particulier : soit γ une courbe fermée simple de une surface S , on considère un voisinage de γ difféomorphe à $A = S^1 \times [0, 1]$ où γ s'identifie à $S^1 \times \{1/2\}$. On munit A des coordonnées (s, t) . Le twist de Dehn est l'identité en dehors de A et est défini sur A par $(s, t) \mapsto (s + 2\pi f(t), t)$ où f est une fonction croissante surjective de $[0, 1]$ dans lui même égale à 0 sur un voisinage de 0 et égale à 1 sur un voisinage de 1. La classe est caractérisée par la donnée de la courbe γ . On appelle aussi twist de Dehn un représentant d'un twist de Dehn au sens de cette définition.*

Exemple. La monodromie associée au livre ouvert (K_0, θ_0) sur la sphère défini plus haut est l'identité du disque et celle du livre ouvert (K_1, θ_1) est un twist de Dehn de l'anneau. En effet, $\frac{\partial}{\partial \theta_2}$ est un champ de vecteurs défini sur $V \setminus K_0$ positivement transverse aux fibres de θ_0 et ayant la forme imposée ci-dessus au voisinage de la reliure. Sur le disque défini par $\theta_2 = 0$, son application premier retour est clairement l'identité.

Montrons le résultat pour le livre ouvert (K_1, θ_1) . Soit f une fonction croissante surjective de $[0, 1]$ dans lui même égale à 0 sur un voisinage de 0 et égale à 1 sur un voisinage de 1. Le champ $f(r_2) \frac{\partial}{\partial \theta_1} + (1 - f(r_2)) \frac{\partial}{\partial \theta_2}$ est un champ de vecteurs défini sur $V \setminus K_1$ positivement transverse aux fibres de θ_1 et ayant la forme voulue au voisinage de la reliure. Son flot vérifie $\theta_1(2\pi) = \theta_1(0) + 2\pi f(r_2)$. L'application premier retour définit donc bien un twist de Dehn.

3.3 Plombage et stabilisation

Le *plombage* est une opération qui modifie un livre ouvert sur une variété V donnée. Pour le définir nous allons utiliser la définition des livres ouverts par suspension. Soit S une surface à bord compacte orientée. On ajoute une anse A d'indice 1 à S le long de ∂S . On obtient une nouvelle surface à bord compacte orientée S' . Il reste à définir la monodromie h' . On commence par prolonger h en h_1 par l'identité sur A (ce qui est possible car h est l'identité près du bord de S). Soit γ une courbe fermée simple qui n'intersecte qu'une seule fois la coâme de A , on appelle t un twist de Dehn associé à γ et on prend $h' = h_1 \circ t$. On obtient alors un nouveau livre ouvert.

Remarque. Il n'est pas évident avec cette définition que l'on obtient un livre ouvert sur la même variété mais c'est la cas.

Définition 3.4. *On dit qu'un livre ouvert (K', θ') est une stabilisation du livre ouvert (K, θ) si on passe de (K, θ) à (K', θ') par une suite finie de plombages.*

Exemple. Reprenons les exemples de la section 3.1. Si on plombe le livre ouvert (K_0, θ_0) de la sphère on obtient le livre ouvert (K_1, θ_1) .

3.4 Théorèmes de décomposition en livres ouverts

Définition 3.5. *Soit (K, θ) un livre ouvert. Les pages et la reliure sont orientés par θ . La structure de contact ξ est portée par le livre ouvert (K, θ) s'il existe une équation α de ξ positive sur K et telle que $d\alpha$ soit non dégénérée et positive sur les pages.*

Exemple. Sur S^3 la structure de contact définie par l'équation $\alpha = r_1^2 d\theta_1 + r_2^2 d\theta_2$ est portée par les livres ouverts (K_0, θ_0) et (K_1, θ_1) .

Soit V une variété de dimension 3 close.

Proposition 3.6 (Thurston-Wilkemper). *[10] Tout livre ouvert sur V porte une structure de contact.*

Théorème 3.7 (Giroux). *[10] Toute structure de contact sur V est portée par un livre ouvert.*

Théorème 3.8 (Giroux). *[10] Deux livres ouverts sur V portent des structures de contact isotopes si et seulement si ils possèdent des stabilisations isotopes.*

3.5 Tout livre ouvert porte une structure de contact

L'objectif de cette section est de montrer la proposition 3.6. Pour cela, on considère la variété V close et (K, θ) un livre ouvert sur V et on veut construire une structure de contact portée par ce livre ouvert.

L'idée générale est d'utiliser la vision par suspension et de construire une équation de contact sur la suspension puis de prolonger la construction au reste de la variété. Pour faciliter ce dernier point, il est plus aisé de réaliser la suspension dans V comme dans la section 3.2. On reprend la construction et les notations de cette section.

Il existe une 1-forme β sur S dont la différentielle est une forme volume et qui vérifie $\varphi_*\beta = \frac{1}{r}dz$ sur un voisinage du bord de S . En effet, d'après la proposition 2.4 (page 11) on sait déjà qu'il existe une 1-forme β sur S dont la différentielle est un forme volume et qui est positive sur le bord. On modifie β sur le bord pour obtenir la condition cherchée : dans l'ouvert $\varphi(U)$, la surface à bord S est $\{(r, 0, z), z \in K, \frac{1}{2} \leq r \leq 1\}$. On écrit $\beta = fdz + gdr$, quitte à se placer sur $\{(r, 0, z), z \in K, \frac{1}{2} \leq r \leq a\}$, on peut supposer que $f > 0$ et quitte à multiplier β par une constante strictement positive, on peut supposer $f < 1$. On remplace β par $\beta_1 = (1 - \chi(r))\frac{1}{r}dz + \chi(r)\beta$, où $\chi : [\frac{1}{2}, a] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction lisse croissante qui vaut 0 au voisinage de $\frac{1}{2}$ et 1 au voisinage de a . On a bien $d\beta_1 > 0$ et β_1 a bien la forme souhaitée au voisinage de ∂S .

Soit $\psi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ une fonction lisse qui est croissante, vaut 0 au voisinage de 0 et 1 au voisinage de 1. On définit la 1-forme $\alpha = dt + c\left((1 - \psi(t))\beta + \psi(t)h^*\beta\right)$ sur $S \times [0, 1]$ où

$c \in \mathbb{R}_+^*$, elle passe au quotient sur V_h . Pour c assez petit α est une forme de contact. De plus $d\alpha$ est positive sur pages restreintes à V' car h préserve l'orientation.

Comme h est l'identité au voisinage du bord, il existe un voisinage de $\partial V'$ qui s'identifie à $\partial S \times [0, \varepsilon[\times S^1$ sur lequel $\alpha(x, t) = dt + c\beta(x)$. On a $\varphi_* dt = d\psi$ donc $\varphi_* \alpha = d\psi + \frac{c}{r} dz$ sur un voisinage de $\partial V'$. On prolonge α au reste de V par une 1-forme du type $f(r)d\psi + g(r)dz$ qui est positivement transverse aux pages si f est positive. La condition de contact est $f'g - fg' > 0$. Si on considère le point de coordonnées $(f(r), g(r))$, la condition signifie que le point tourne dans le sens indirect quand r augmente. On veut $(f(0), g(0)) = (0, a)$ avec a positif. On prend a assez petit pour pouvoir prolonger les fonctions f et g de façon \mathcal{C}^∞ en respectant la condition. La 1-forme α ainsi construite est une équation de contact portée par le livre ouvert.

Chapitre 4

Toute structure de contact est portée par un livre ouvert

L'objectif de ce chapitre est de montrer le théorème 3.7 qui est rappelé dans le titre. On se donne une structure de contact sur la variété close de contact (V, ξ) de dimension 3. On note α une équation de la structure de contact.

Le principe de la démonstration est le suivant : on construit une page du livre ouvert cherché en épaississant dans la direction de ξ le 1-squelette d'une cellulation polyédrale de V particulière. Puis, en épaississant la page, on obtient un scindement de Heegaard¹ de V et on construit la fibration θ sur chaque corps en anses. Enfin, on montre que le livre ouvert construit convient.

Ce chapitre commence par des définitions relatives aux cellulations polyédrales et quelques lemmes généraux permettant de transformer une cellulation. On construit ensuite successivement une cellulation polyédrale de contact totale sur V (section 4.2), une page du futur livre ouvert ainsi qu'un scindement de Heegaard ayant de bonnes propriétés (section 4.3) et un livre ouvert (section 4.4). Enfin, on montre que ce livre ouvert porte ξ .

4.1 Cellulations polyédrales

4.1.1 Définitions

Dans cette section, après quelques définitions générales, on introduit des cellulations polyédrales particulières qui dépendent de la structure de contact : les cellulations de contact et les cellulations de contact totales. C'est à partir d'une cellulation polyédrale de contact totale de V que l'on va construire le livre ouvert qui porte ξ .

Définition 4.1. Une cellule polyédrale de dimension n (ou n -cellule) de V est un plongement continu d'un polyèdre compact de \mathbb{R}^n dans V . Si $n = 0$, on parle aussi de sommet, si $n = 1$ d'arête et si $n = 2$ de face.

On identifiera souvent par abus de langage une cellule polyédrale à son image.

Définition 4.2. Une cellulation polyédrale de V est un ensemble de cellules polyédrales tel que :

- les intérieurs des cellules forment une partition de V ;
- le bord d'une cellule est une union de cellules ;
- les cellules de dimension inférieure ou égale à deux sont de classe C^∞ ;
- deux faces ayant une arête a commune et appartenant à la même 3-cellule forment un angle dans l'intervalle $[0, \pi]$ en tout point de a .

L'ensemble des faces de dimension n d'une cellulation polyédrale est appelé le n -squelette.

Remarque. Revenons sur la notion d'angle de deux faces. Dans une carte l'angle d'incidence de deux faces d'une 3-cellule en un point de l'arête a a un sens. Cette notion n'est pas invariante par difféomorphisme cependant la propriété d'avoir un angle d'incidence dans $[0, \pi]$ est

1. Pour la définition de scindement de Heegaard et les définitions liées on pourra se reporter à [15].

invariante par difféomorphisme préservant l'orientation. En effet l'angle d'incidence de deux faces est dans $[0, \pi]$ en x si et seulement si la normale sortante au bord d'une des faces en x est tangente ou positivement transverse à l'autre face.

Définition 4.3. *Deux faces d'une même 3-cellule d'une cellulation ayant une arête commune sont ξ -bien positionnées s'il n'existe pas dans cette arête d'arc $[b, c]$, où b est une singularité négative d'une face et c une singularité positive de l'autre face, tel que $]b, c[$ soit une orbite régulière des feuilletages caractéristiques des deux faces, orientée de b vers c .*

Cette condition permet de contrôler les mouvements relatifs des plans tangents aux faces et des plans de contact le long du 1-squelette. Son utilité apparaîtra clairement par la suite.

Définition 4.4. *Une cellulation polyédrale de V est dite de contact si*

- les arêtes sont legendriennes ;
- les faces sont ξ -convexes ;
- les faces sont ξ -bien positionnées ;
- les cellules de dimension 3 sont incluses dans des cartes de Darboux.

Définition 4.5. *Une cellulation polyédrale de contact de V est dite totale si l'invariant de Thurston-Bennequin du bord de chaque 2-cellule vaut -1 .*

Remarque. Le bord d'une 2-cellule n'est pas régulier (il n'est que continu) mais comme il est legendrien et qu'aux sommets les plans de contact et les plans tangents coïncident, l'angle entre les deux champs de plans varie continûment au niveau des singularités et on peut bien définir l'invariant de Thurston-Bennequin.

4.1.2 Modifications d'une cellulation polyédrale

Ce paragraphe présente quelques procédés généraux de modification d'une cellulation polyédrale qui seront utiles par la suite.

Lemme 4.6. *Soient V et V' deux variétés de dimension 3 compactes orientées, et $\varphi : V \rightarrow V'$ un difféomorphisme préservant l'orientation. Soit Δ une cellulation polyédrale sur V . Alors l'image de Δ par φ est une cellulation polyédrale de V' .*

La démonstration de ce lemme ne présente pas de difficulté. Pour construire des difféomorphismes préservant l'orientation on utilisera souvent les deux lemmes suivants.

Lemme 4.7. *Soient I un intervalle fermé, $U \subset V$ un ouvert et $\delta : I \times [0, 1] \rightarrow U$, une isotopie. On suppose que δ est constante au voisinage du bord de I et du bord de $[0, 1]$. Alors on peut étendre δ en une isotopie de V qui est l'identité en dehors de U .*

Démonstration. On peut supposer que $I = [0, 1]$. Dans $U \times [0, 1] \subset V \times [0, 1]$ on considère la surface $S = \{(\delta_t(x), t), x \in I, t \in [0, 1]\}$. C'est une surface lisse. Il existe $\varepsilon > 0$ et un difféomorphisme φ de $S \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ dans $U \times [0, 1]$ tel que pour tout $x \in S$ on ait $\varphi(x, 0) = x$. Sur $S \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ on considère le champ de vecteurs

$$X((\delta_t(x), t), \eta) = \frac{\partial \delta_t(x)}{\partial t}.$$

On transporte X par φ sur $\varphi(S)$.

Il existe $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ tel que δ_t soit constant pour tous $x, t \in [0, \alpha] \cup [1 - \alpha, 1]$. On pose

$$A = \left\{ \varphi(\delta_t(x), t, \eta), x \in [\alpha, 1 - \alpha], t \in [\alpha, 1 - \alpha], \eta \in \left[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}\right] \right\}$$

et

$$B = \left\{ \varphi(\delta_t(x), t, \eta), x \in \left[\frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}\right], t \in \left[\frac{\alpha}{2}, 1 - \frac{\alpha}{2}\right], \eta \in \left[-\frac{2\varepsilon}{3}, \frac{2\varepsilon}{3}\right] \right\}.$$

L'ensemble A est fermé, B est ouvert et $A \subset B$.

Considérons une partition de l'unité $(B, \varphi_B), (V \setminus A, \varphi_A)$. Soit Y le champ de vecteurs sur $V \times [-1, 1]$ défini par $Y = \varphi_B X + \varphi_A 0$, c'est un champ de vecteurs lisse. Sur V on considère le champ $X_t(x) = Y(x, t)$, sur S , c'est le champ $\frac{\partial \delta_t(x)}{\partial t}$. Comme V est compacte, son flot est défini jusqu'au temps 1, sa restriction à S est δ_t et en dehors de U on obtient l'identité. C'est l'isotopie cherchée. \square

Lemme 4.8. Soient S une surface fermée, $U \subset V$ un ouvert et $\delta : S \times [0, 1] \rightarrow U$, une isotopie. On suppose que δ est constante au voisinage du bord de S et du bord de $[0, 1]$. Alors on peut étendre δ en une isotopie de V qui est l'identité en dehors de U .

La démonstration est analogue à la précédente.

Enfin, énonçons un résultat permettant de transformer localement les faces au niveau des arêtes et loin des sommets sans modifier les autres faces ou les arêtes.

Lemme 4.9. Soient une cellulation de contact, F une face contenant l'arête a et p un point de a . On suppose que dans une carte munie des coordonnées (x, y, z) :

- a est contenue dans l'axe des x ;
- F est contenue dans le demi-espace $\{y \geq 0\}$ et F est un graphe sur le demi-plan $\{(x, y, 0), y \geq 0\}$;
- il existe b tel que F est contenue dans $\mathcal{C} = \{(x, y, z), y \geq 0, -by < z < by\}$ et qu'aucune autre face n'intersecte $\overline{\mathcal{C}}$ en dehors de a .

Soit G un graphe sur le demi plan $\{(x, y, 0), y \geq 0\}$ contenu dans \mathcal{C} égal à F en dehors d'un voisinage de p . Alors on peut remplacer F par G dans la cellulation sans changer a ni aucun autre élément du 0-squelette, 1-squelette ou 2-squelette.

Démonstration. On se place dans la carte définie ci-dessus. On compose l'application définissant la 3-cellule au-dessus de F par

$$\varphi_1 : (x, y, z) \mapsto \left(x, y, (z - F(x, y)) \cdot \frac{by - G(x, y)}{by - F(x, y)} + G(x, y) \right)$$

dans \mathcal{C} et $\varphi_1 = \text{Id}$ ailleurs et la 3-cellule au-dessous de F par

$$\varphi_2 : (x, y, z) \mapsto \left(x, y, (z + by) \cdot \frac{G(x, y) + by}{F(x, y) + by} - by \right)$$

dans \mathcal{C} et $\varphi_2 = \text{Id}$ ailleurs. On obtient bien des homéomorphismes qui sont des difféomorphismes en restriction aux faces. \square

4.2 Construction d'une cellulation de contact totale

Venons-en à la preuve du théorème 3.7 proprement dite. Elle occupe les trois dernières sections de ce rapport et est découpée en un certain nombre d'étapes. L'objectif de cette section est de construire sur V une cellulation de contact totale. On admet pour cela le résultat suivant, on pourra par exemple consulter [1] pour plus de détails.

Théorème 4.10. Sur toute variété compacte de dimension 3, il existe une cellulation polyédrale dont les 3-cellules sont incluses dans des cartes de Darboux et telle que deux faces appartenant à une même 3-cellule ayant une arête commune a forment un angle dans $[0, \pi]$ en tout point de a .

Soit Δ une cellulation polyédrale de V donnée par le théorème précédent. On note $a_i, i \in 1 \dots p$ ses arêtes et $F_k, k \in 1 \dots q$ ses faces. On va modifier progressivement Δ pour obtenir une cellulation polyédrale de contact. Pour cela, on commence par modifier les arêtes pour les rendre legendriennes puis on modifie les faces pour les rendre ξ -bien positionnées puis convexes. On obtient ainsi une cellulation polyédrale de contact. Enfin, on transforme la cellulation obtenue pour la rendre totale.

4.2.1 Modification des arêtes

Étape 1. On modifie Δ pour rendre le 1-squelette legendrien.

L'idée générale est de commencer par modifier la cellulation au voisinage des sommets. Pour cela on va remplacer localement Δ pour obtenir une cellulation que l'on contrôle au voisinage de chaque sommet. Lors de cette opération, on va non seulement garantir que les arêtes de la nouvelle construction sont legendriennes mais on va aussi imposer des propriétés supplémentaires aux faces. Celles-ci, qui concernent notamment le feuilletage caractéristique, permettront de faciliter la suite de la construction.

Étape 1.1.

Commençons par modifier Δ au voisinage des sommets. Soit p un sommet de la cellulation. Quitte à ré-indexer, on note $a_1 \cdots a_l$ les arêtes issues de p et $F_1 \cdots F_m$, les faces contenant p . Il existe un contactomorphisme d'un voisinage de p dans un voisinage U de 0 dans \mathbb{R}^3 muni de l'équation de contact $\alpha = dz + r^2 d\theta$. On parlera de plan horizontal pour désigner le plan (r, θ) et d'axe vertical pour désigner l'axe des z . Soit $g : (x, y, z) \mapsto (x + \varepsilon f(z), y + \varepsilon f(z), z)$ où f vaut 1 au voisinage de p et 0 au voisinage de ∂U . Quitte à composer la cellulation Δ par g avec ε assez petit et à restreindre U on peut supposer que :

- aucune tangente à une arête n'est verticale ;
- les tangentes aux arêtes possèdent toujours une composante radiale non nulle ;
- les projections des arêtes sur le plan horizontal sont toutes disjointes ;
- les faces sont des graphes sur le plan horizontal, on note la fonction comme la face concernée (c'est-à-dire F_k).

Étape 1.2.

Il existe des réels strictement positifs ε , η et R tels que $\eta < R$ et $C = D(0, R + \eta) \times [-\varepsilon, \varepsilon]$ soit inclus dans U et que les arêtes et les faces dans C soient contenues dans $D(0, R + \eta) \times [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$. Modifions les arêtes au voisinage de $r = R$. Notons b_j le segment issu de p tangent à a_j en p . Quitte à restreindre R et η , pour tout $j \in 1 \cdots l$, il existe un difféomorphisme φ_j de U tel que :

- φ_j est l'identité au voisinage de ∂U , de p et au niveau de toutes les arêtes différentes de a_j ;
- l'image de a_j par φ_j est b_j dans $\{(r, \theta, z) \in C, R - \eta < r < R + \eta\}$;
- $\varphi_j(\Delta)$ conserve les propriétés de Δ (en particulier les faces sont toujours des graphes sur le plan horizontal).

On modifie Δ en composant par φ_j pour tout j , on ne modifie pas les autres arêtes lors de cette opération. On obtient une nouvelle cellulation que l'on note toujours Δ .

Étape 1.3.

Construisons les faces de la nouvelle cellulation. On commence par déterminer leur intersection avec $\partial D(0, R) \times [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$. La surface $\partial D(0, R) \times [-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$ intersecte chaque arête a_i en exactement un point, que l'on note x_i . Soit y_i la projection verticale du point x_i sur $\partial D(0, R) \times \{0\}$. Soient r_i les rayons issus de 0 passant par y_i , le rayon r_i est la projection de b_i sur le plan horizontal. On construit m fonctions $f_k, k \in 1 \cdots m$ telles que :

- si F_k a pour bord a_i et $a_{i'}$ et si on note c_k l'arc de $\partial D \times \{0\}$ entre y_i et $y_{i'}$ qui contient la projection de F_k alors f_k est définie de c_k dans $[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$ et $f_k(y_i) = 0$ et $f_k(y_{i'}) = 0$;
- les graphes de f_k et $f_{k'}$ sont disjointes en dehors de leurs extrémités ;
- si pour $u \in \partial D(0, R)$ on a $F_k(u) < F_{k'}(u)$ alors $f_k(u) < f_{k'}(u)$;
- si F_k et $F_{k'}$ sont deux faces d'une même 3-cellule ayant l'arête a_j en commun alors les tangentes aux graphes de f_k et $f_{k'}$ ne sont ni colinéaires ni horizontales.

Pour tout k on considère alors la fonction g_k qui va du secteur angulaire défini par c_k dans $[-\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\varepsilon}{2}]$ en posant $g_k(r, \theta) = \exp(-r^2)f_k(\theta)$, on obtient alors une fonction lisse. Les fonctions $g_k, k \in 1 \cdots m$ vérifient :

- si F_k a pour bord a_i et $a_{i'}$ alors $g_k(r_i) = 0$ et $g_k(r_{i'}) = 0$;
- si pour $u \in D(0, R + \eta)$ on a $F_k(u) < F_{k'}(u)$ alors $g_k(u) < g_{k'}(u)$;
- si F_k et $F_{k'}$ sont deux faces d'une même 3-cellule ayant l'arête a_j en commun alors les plans tangents aux graphes de g_k et $g_{k'}$ un angle dans $]0, \pi]$ en tout point de a_j différent de 0 ;
- si F_k a pour bord a_i et $a_{i'}$ alors le graphe de g_k n'est pas tangent à ξ le long de r_i et $r_{i'}$ en dehors de 0.

Quitte à multiplier tous les g_k par une fonction positive suffisamment petite on peut supposer que les singularités du feuilletage caractéristique des graphes des g_k sont toutes des nœuds en p et que le long des rayons r_j l'angle orienté entre les plans tangents aux graphes ayant cette arête pour bord et ξ est strictement décroissant en s'éloignant du sommet. On effectue ces opérations au niveau de tous les sommets de Δ .

Étape 1.4.

Il faut remplacer les faces de Δ par les graphes des g_k . Pour cela, on commence par modifier Δ pour faire coïncider les arêtes au voisinage de $r = R$. Il existe une isotopie δ_t , vérifiant $\frac{\partial \delta_t}{\partial t}$ vertical, qui projette a_j sur r_j au voisinage de y_j et qui est l'identité au voisinage des sommets. On peut appliquer le lemme 4.7 pour étendre l'isotopie à toute la variété en garantissant que $\frac{\partial \delta_t}{\partial t}$ est vertical en tout point. Par conséquent en transportant la cellulation par δ_1 on obtient une nouvelle cellulation (toujours notée Δ) dont les faces restreintes à U sont des graphes sur le plan horizontal (toujours notés F_k). On interpole les faces F_k et les graphes de g_k dans un voisinage de $\partial D(0, R)$ où ils ont le même bord pour obtenir des faces qui valent g_k au voisinage de p et F_k loin. Il reste à transformer les 3-cellules. Comme les nouvelles faces vérifient les mêmes propriétés combinatoires que les anciennes faces, on peut conclure en utilisant une méthode analogue à celle de la démonstration du lemme 4.9.

Étape 1.5.

On rend les arêtes legendriennes loin des sommets en utilisant le lemme 4.7.

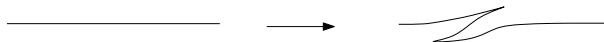
4.2.2 Modification des faces

On va modifier les faces en dehors d'un voisinage des sommets pour rendre les faces ξ -bien positionnées puis convexes.

Étape 2. On rend les faces ξ -bien positionnées.

Au cours de cette étape, on commence par diminuer l'invariant de Thurston-Bennequin de chaque arête. Puis on se place au voisinage d'une arête et on détermine un critère de ξ -bonne position en fonction de l'angle le long du bord entre les plans tangents aux faces et ξ . Enfin, on se sert de ce critère pour supprimer les situations interdites et obtenir des faces ξ -bien positionnées.

Plaçons nous au niveau d'une arête a de la cellulation loin d'un sommet. On peut diminuer l'invariant de Thurston-Bennequin de a en la faisant spiraler, on procède de la façon suivante : dans une carte de Darboux, on peut supposer que a est contenue dans l'axe des x . On modifie a en ajoutant deux cusps et en gardant une pente suffisamment proche 0 pour rester dans un voisinage de l'arête qui n'intersecte pas d'autres arêtes comme dans la démonstration de la proposition 1.19 (page 8).



On peut par conséquent rendre l'invariant de Thurston-Bennequin de chaque arête strictement négatif.

Considérons une arête a de la cellulation, on veut garantir que les faces sont ξ -bien positionnées le long de a . On se place dans une carte de Darboux telle que a est contenue dans l'axe des x . On oriente a comme l'axe des x et on paramètre le segment a par l'intervalle $[0, 1]$ (on appelle aussi a la paramétrisation). Sur a s'appuient un certain nombre de faces de la cellulation, on suppose quitte à ré-indexer que ce sont les faces F_1, \dots, F_l . On définit les fonctions lisses $\theta_j : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ où $\theta_j(t)$ est l'angle orienté entre $T_{a(t)}F_j$ et $\xi(a(t))$ et telles que $\theta_j(0) = 0$ ou $\theta_j(0) = \pi$ (on oriente les angles en prenant pour normale $\frac{\partial}{\partial x}$). En dehors de 0 et 1 tous les θ_j sont distincts. On peut supposer $\theta_1 \leq \dots \leq \theta_l$. On sait de plus qu'au voisinage de 0 toutes les fonctions θ_j sont strictement décroissantes.

On peut modifier la cellulation, en dehors d'un voisinage des extrémités de a sur lequel les angles θ_j appartiennent à $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ (modulo 2π) et ne sont nuls (modulo 2π) qu'en 0 et 1, pour rendre l'angle entre la face F_i et ξ strictement décroissant le long de a en utilisant le lemme 4.8 car chaque arête a un nombre de Thurston-Bennequin strictement négatif.

La singularité des feuilletages caractéristiques au niveau des sommets est isolée et hyperbolique pour toutes les faces. Comme l'angle entre deux faces n'est jamais nul en dehors des sommets, on peut isoler les singularités de chaque face le long de a et les rendre hyperboliques en utilisant le lemme 4.9.

Commençons par caractériser les situations dans lesquelles les faces ne sont pas ξ -bien positionnées. Deux faces bordent la même 3-cellule si et seulement si leurs indices diffèrent de un modulo l . Par ailleurs les orbites du feuilletage caractéristique des faces F_i et F_{i+1} sont orientées dans le même sens sur le segment $]b, c[$ si et seulement si il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que pour

tout $x \in]b, c[$ on ait $\theta_i(x) < k\pi < \theta_{i+1}(x)$. Enfin, les singularités de F_i et F_{i+1} pour lesquelles θ_i et θ_{i+1} sont égaux sont de signes opposés.

Soit $x \in a$ une singularité de F_i . On note p la dérivée de θ_i en x .

- si $p < 0$ et la singularité est positive ou si $p > 0$ et la singularité est négative, les orbites du feuilletage caractéristique dans a s'éloignent de x ;
- si $p > 0$ et la singularité est positive ou si $p < 0$ et la singularité est négative, les orbites du feuilletage caractéristique dans a s'approchent de x .

Soient deux faces F_i et F_{i+1} et un arc² $[b, c]$ de a reliant une singularité de F_i et une singularité de F_{i+1} de signe opposé. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que θ_i et θ_{i+1} valent $k\pi$ en les singularités b ou c correspondantes. Il n'y a que deux cas possibles soit θ_i et θ_{i+1} ont des tangentes de pentes positives en leurs singularités (et b est une singularité de F_{i+1}) et il y a une situation interdite pour la ξ -bonne position soit θ_i et θ_{i+1} ont des tangentes de pentes négatives (et b est une singularité de F_i) et il n'y a pas de situation interdite. Donc les faces F_i et F_{i+1} sont ξ -bien positionnées si et seulement s'il n'existe pas une singularité b de F_{i+1} et c de F_i telles que $b < c$ et $\theta_i(c) = \theta_{i+1}(b)$.

L'objectif est donc de supprimer les singularités mal positionnées. Supposons qu'il existe i , $k \in \mathbb{Z}$, une singularité b de F_{i+1} et une singularité c de F_i tels que $b < c$ et $\theta_i(c) = \theta_{i+1}(b) = k\pi$. On peut supposer que k est l'entier relatif minimal tel que l'hypothèse soit vérifiée i étant fixé. On peut aussi supposer que c est la plus petite singularité de F_i telle que $\theta_i(c) = k\pi$ et $b < c$ et b la plus grande singularité de F_{i+1} telle que $\theta_{i+1}(b) = k\pi$ et $b < c$. Comme les dérivées $\theta'_i(c)$ et $\theta'_{i+1}(b)$ sont strictement positives, il existe une singularité b_1 de F_{i+1} et une singularité c_1 de F_i telles que³ $c_1 \leq b_1 < b < c$ et $\theta_i(c_1) = \theta_{i+1}(b_1) = k\pi$. On peut supposer que c_1 est la plus grande singularité de F_{i+1} telle qu'il existe b_1 vérifiant les hypothèses précédentes et que pour c' fixé, b_1 est la plus petite singularité de F_i vérifiant $c_1 \leq b_1$. Ainsi dans l'intervalle $[b_1, b]$, $\theta_i > (k-1)\pi$. Soit j le plus grand indice tel que θ_j vaille $k\pi$ en au moins un point l'intervalle $[b_1, b]$. On a $j < l$. L'ensemble des points en lesquels θ_j vaut $k\pi$ contient au moins deux éléments. Notons a_1 et a_2 les deux plus petits éléments de cet ensemble. Sur l'intervalle $]a_1, a_2[$, aucune fonction θ_p ne vaut $k\pi$ et $\theta_j > (k-1)\pi$. On peut donc modifier localement F_j par le lemme 4.9 pour supprimer les singularités a_1 et a_2 . On effectue cette opération jusqu'à la suppression de toutes les singularités de F_{i+1} dans l'intervalle $[b_1, b]$ ce qui est possible car chaque face n'a qu'un nombre fini de singularités. On supprime ainsi toutes les singularités mal positionnées.

Étape 3. *On rend les faces ξ -convexes*

Soit F une face de la cellulation. On sait déjà, d'après l'étape précédente, que l'on peut rendre les singularités hyperboliques sur le bord. Les singularités sont donc isolées dans un voisinage du bord. De plus, comme les faces sont ξ -bien positionnées, il n'y a pas de connexion de selle rétrograde sur le bord. On utilise alors le théorème de Peixoto (théorème 2.5, page 12) pour rendre le feuilletage caractéristique presque de Morse-Smale et une démonstration analogue à celle du théorème 2.17 (page 16) montre que la surface F est convexe.

Bilan. *On a construit sur V une cellulation polyédrale de contact dont les singularités sont isolées et hyperboliques sur le bord et telle que l'invariant de Thurston-Bennequin des faces soit strictement négatif.*

4.2.3 Construction d'une cellulation polyédrale de contact totale

Étape 4. *On transforme la cellulation polyédrale de contact obtenue pour la rendre totale.*

Soit m l'invariant de Thurston-Bennequin minimal pour les faces de la cellulation. Si $m < -1$ on modifie la cellulation pour augmenter m tout en préservant le caractère de contact et la négativité des invariants de Thurston-Bennequin des faces. Pour cela, on va ajouter à la cellulation des arêtes tracées sur les faces de Δ .

Soit F une face de la cellulation telle que $\text{tb}(\partial F) = m$. Il existe un voisinage U de F et un contactomorphisme de U dans un voisinage de 0 de \mathbb{R}^3 muni de la structure standard. Dans U la structure ξ est donc tendue. La face F est convexe, on peut donc considérer une courbe de découpage Γ . Les composantes connexes de Γ ne peuvent être que des cercles ou

2. Le cas d'un arc $[c, b]$ se traite de façon analogue.

3. Le cas symétrique $b < c \leq c_1 \leq b_1$ se traite de façon analogue.

des courbes ayant leurs extrémités dans ∂F . Comme ξ est tendue dans U , il ne peut pas y avoir de cercles et donc toutes les composantes de Γ joignent le bord de F . La courbe Γ n'est pas quelconque. En effet, il y a au plus une composante de Γ qui a une extrémité entre deux singularités successives du bord. De plus, entre deux singularités de signes différents il y a toujours une extrémité de composante de Γ et aucune entre deux singularités de même signe. Comme $\text{tb}(\partial F) < -1$, la courbe Γ possède au moins deux composantes connexes.

Étape 4.1. *Il existe une courbe γ du feuilletage caractéristique de F qui ne rencontre pas Γ , qui a ses extrémités dans ∂F et dont les extrémités séparent ∂F en deux courbes d'invariants de Thurston-Bennequin compris strictement entre m et 0 .*

Démonstration. Si une courbe γ du feuilletage caractéristique de F ne rencontre pas Γ et a ses extrémités dans ∂F alors elle joint des singularités de même signe et l'invariant de Thurston-Bennequin des deux courbes de ∂F qu'elle délimite sont bien définis.

On note $X_1, \dots, X_p = X_0$ les ensembles maximaux de singularités de même signe et adjacentes le long de ∂F , indexés de sorte que X_i et X_{i+1} contiennent des singularités successives le long de ∂F .

Il est clair que pour tout j , l'ensemble X_j est contenu dans une composante connexe de $F \setminus \Gamma$.

Il existe une composante de $F \setminus \Gamma$ qui contient au moins deux X_j distincts. En effet, soit Γ_1 une composante connexe de Γ qui a ses extrémités entre X_i et X_{i+1} et entre X_j et X_{j+1} . Comme Γ a au moins deux composantes connexes, on a $X_i \neq X_{j+1}$ ou $X_j \neq X_{i+1}$. Si $X_i \neq X_{j+1}$, les deux éléments X_i et X_{j+1} sont dans la même composante connexe de $F \setminus \Gamma$ et symétriquement.

On considère l'ensemble Y des X_k contenus dans une même composante connexe de $F \setminus \Gamma$. Par construction des courbes de découpage, pour tout X_k dans Y il existe une orbite (issue d'une selle) qui le relie à un autre élément de Y . On la note γ . La courbe γ vérifie $\text{tb}(\gamma) = 0$. Elle sépare la surface S en deux surfaces convexes de bord legendrien et dont la somme des invariants de Thurston-Bennequin est m . Si les deux invariants de Thurston-Bennequin sont strictement contenus entre m et 0 , γ est la courbe cherchée. Sinon⁴ il existe une des deux surfaces, que l'on note S' pour laquelle l'invariant de Thurston-Bennequin est inférieur ou égal à m et on itère le procédé sur S' . Le processus s'arrête car la courbe de découpage de S' a moins de composantes connexes que Γ et $|\text{tb}(\partial S')|$ minore le nombre de telles composantes connexes. \square

On ajoute une nouvelle face à la cellulation en séparant F par γ . Si γ a un sommet p pour extrémité, quitte à modifier la face F loin du bord tout en gardant ses propriétés, on peut supposer que dans la carte de Darboux au sommet p considéré dans l'étape 1 la projection sur le plan horizontal de $\gamma'(p)$ est différente des tangentes aux autres arêtes. En effet, la singularité en p est un nœud.

Par un procédé analogue à celui du lemme 4.8, on modifie la cellulation au niveau des polyèdres pour que l'image réciproque de γ soit un segment. On obtient de nouveaux polyèdres et ainsi une nouvelle cellulation. Elle est toujours de contact, en effet les faces restent bien positionnées car le long de γ les singularités des deux faces sont toujours de même signe. Enfin, on effectue cette opération pour toutes les faces d'invariant de Thurston-Bennequin m et on raisonne par récurrence.

4.3 Obtention d'un scindement de Heegaard feuilleté

Dans cette section, on construit une page du livre ouvert et un scindement de Heegaard qui nous permettra de construire entièrement le livre ouvert dans la section suivante. Pour cela, on commence par donner un critère de convexité qui sera utile à plusieurs reprises dans la suite de la démonstration. Puis, on construit une page S en épaississant le 1-squelette dans la direction de ξ , et un corps en anses N au voisinage de S difféomorphe à $\hat{S} \times [0, 1]$ tel que $d\alpha$ soit positive sur les images réciproques de $S \times \{t\}$, $t \in [0, 1]$ (et vérifiant d'autres conditions techniques). Enfin, on montre que le second corps en anses, complémentaire du premier, est tendu et a une forme particulière.

4. En réalité, cette situation ne se présente pas car, par l'inégalité de Bennequin, les invariants de Thurston-Bennequin des faces sont tous négatifs et un invariant nul entraînerait l'existence d'un disque vrillé.

Lemme 4.11. *Soit S une surface fermée orientable dans une variété close orientée de dimension 3 munie d'une structure de contact définie par une équation α . Soit K une courbe tracée sur S transverse à ξ . On suppose que le champ de Reeb R associé à α est transverse à $S \setminus K$, qu'il est dans le plan tangent à S en tout point de K et qu'en traversant K on passe d'une zone où R est positivement transversal à S à une zone où R est négativement transversal à S ou inversement. Alors S est convexe et admet K pour courbe de découpage.*

Démonstration. Soit ω une forme volume sur S et Y tel que $i_Y\omega = \alpha|_{TS}$, le champ de vecteurs Y dirige le feuilletage caractéristique de S . D'après le calcul de Lie-Cartan, $\text{div}_\omega(Y)\omega = d\alpha|_{TS}$. La courbe K est transverse au feuilletage caractéristique. Notons

$$S_+ = \{x \in S, R_x \text{ est positivement transversal à } S\}$$

et

$$S_- = \{x \in S, R_x \text{ est négativement transversal à } S\}.$$

Alors $S \setminus K = S_+ \amalg S_-$ et on a bien $\text{div}_\omega(Y) > 0$ sur S_+ et $\text{div}_\omega(Y) < 0$ sur S_- . \square

Étape 5. *On construit une surface Σ compacte qui contient le 1-squelette et un voisinage du 1-squelette N qui vérifient :*

- la surface $S = \Sigma \cap N$ est une surface compacte orientée à bord, de bord K tel que $K \subset \partial N$;
- K est positivement transversal à ξ ;
- ∂N est une surface convexe et a pour courbe de découpage K ;
- il existe un difféomorphisme de $N \setminus K$ dans $\mathring{S} \times [0, 1]$ qui envoie \mathring{S} sur $S \times \{\frac{1}{2}\}$ et tel que $d\alpha$ soit positive sur les images réciproques de $S \times \{t\}, t \in [0, 1]$;
- quitte à modifier les faces en dehors des arêtes (et à subdiviser), K intersecte exactement deux fois chaque face et les intersections sont négatives .

On commence par construire une surface Σ contenant le 1-squelette, transverse au champ de Reeb et tangente à ξ le long du 1-squelette hors d'un voisinage des sommets. On restreint ensuite Σ pour obtenir la surface S cherchée. Enfin on épaissit S en suivant le flot du champ de Reeb pour construire le corps en anses N .

Étape 5.1. *Soit W un voisinage des sommets de la cellulation. On construit :*

- une surface Σ contenue dans V , transverse au champ de Reeb, contenant le 1-squelette et tangente au 1-squelette en dehors de W ;
- une surface à bord S incluse dans Σ , contenant le 1-squelette telle que $K = \partial S$ soit positivement transversale, que, quitte à modifier les faces de la cellulation (et à subdiviser), K intersecte chaque face en exactement deux points et que ces intersections soient de même signe.

La difficulté est de montrer l'existence de Σ au voisinage des sommets de la cellulation. Soit p un sommet de Δ , si p est un sommet qui a été ajouté à la cellulation au cours de l'étape 4 alors toutes les arêtes issues de p sont tracées sur une même face, on la prolonge pour obtenir une face définie au voisinage de p . On obtient alors une surface définie au voisinage de p qui est tangente à ξ en p .

Si p est un sommet de la cellulation initiale, on se place dans une carte de Darboux définie dans l'étape 1. Quitte à restreindre la carte considérée, on se place dans un voisinage de p sur lequel la cellulation n'a pas été modifiée après l'étape 1. On est alors dans la situation suivante : les faces sont des graphes sur le plan horizontal et il y a deux type d'arêtes, celles présentes initialement, notées $a_i, i = 1 \cdots p$, qui sont des rayons dans le plan horizontal et celles, notées $b_j, j = 1 \cdots q$, ajoutées à l'étape 4 qui sont tracées sur les faces. Les arêtes ont toutes des tangentes dont les projections sur le plan horizontal sont différentes. Quitte à restreindre la carte, on se place dans un voisinage de la forme $D(0, r) \times [-\eta, \eta]$ dans lequel les projections des arêtes sur le plan horizontal sont toutes disjointes. On suppose de plus qu'il existe dans $D(0, r) \times \{0\}$ un secteur angulaire C_j ne rencontrant aucune autre arête autour de chaque projection d'arête ajoutée b_j . En dehors des secteurs C_j , on prend pour Σ le plan horizontal. Soit b_j une arête ajoutée, elle est tracée sur une face que l'on note F . On modifie F pour la rendre horizontale au voisinage de bord de C_j et on recolle aux parties de Σ déjà construites. On obtient alors une surface définie au voisinage de p qui est tangente à ξ en p .

On prolonge alors les portions de surfaces obtenues le long des arêtes par une surface tangente à ξ le long des arêtes. On restreint Σ à un voisinage suffisamment petit du 1-squelette pour obtenir une surface à bord $S \in \Sigma$, telle que $K = \partial S$ soit positivement transverse, intersecte les faces transversalement et que pour toute face F la somme des intersections algébriques entre K et S soit -2 . Ceci est possible car l'invariant de Thurston-Bennequin du bord de chaque face est -1 . Comme les faces sont bien positionnées, on peut alors modifier les faces de la cellulation pour qu'il y ait exactement deux intersections de même signe entre K et les faces⁵.

En considérant le flot du champ de Reeb, on peut construire un difféomorphisme ψ d'un voisinage U de Σ dans $\Sigma \times]-\varepsilon, \varepsilon[$. On repère $\Sigma \times]-\varepsilon, \varepsilon[$ par les coordonnées (x, t) . L'image du champ de Reeb est $\frac{\partial}{\partial t}$.

Étape 5.2. *On construit un voisinage fermé de $\mathring{S} \times \{0\}$, noté N_1 tel que ∂N_1 soit une surface et $\partial N_1 = \psi(K) \cup \Phi(\mathring{S}) \cup (-\Phi(\mathring{S}))$ où $\Phi : \mathring{S} \rightarrow]0, \varepsilon[$ est une fonction lisse.*

On va construire ∂N_1 localement et obtenir le résultat globalement en utilisant une partition de l'unité. Construisons ∂N_1 au voisinage de ∂S . La surface S est compacte donc son bord est composé de cercles. Il existe un voisinage U_1 de ∂S dans Σ de la forme $\bigcup_{i=1}^k S_i^1 \times]-\alpha, \alpha[$. On se place sur $S_i^1 \times]-\alpha, \alpha[\times]-\varepsilon, \varepsilon[$ que l'on considère comme inclus dans \mathbb{R}^3 muni des coordonnées (x, y, t) . On considère le cylindre de rayon $\frac{\alpha}{2}$ et d'axe S_i^1 . Il est localement de la forme

$$S_i^1 \cup \Phi(A) \cup (-\Phi(A))$$

où $A = \{(x, y, 0), 0 < y < \frac{\alpha}{2}\}$.

On prolonge Φ par une application constante à l'aide d'une partition de l'unité. Posons alors

$$\partial N_1 = \psi(K) \cup \Phi(\mathring{S}) \cup (-\Phi(\mathring{S})).$$

Au voisinage de ∂S , l'ensemble ∂N_1 est une portion de sphère donc lisse et ailleurs ∂N_1 est un graphe. Donc ∂N_1 est une surface. Prenons

$$N_1 = \partial N_1 \cup \{(x, t) \in \mathring{S} \times]-\varepsilon, \varepsilon[, -\Phi(x) < t < \Phi(x)\}.$$

Alors $N = \psi^{-1}(N_1)$ est un voisinage du 1-squelette, $K = \partial N \cap \Sigma$ et ∂N vérifie les hypothèses du lemme 4.11 donc ∂N est convexe de courbe de découpage K . Par ailleurs

$$\begin{aligned} f : \mathring{S} \times [0, 1] &\rightarrow N \setminus K \\ (x, t) &\mapsto \psi^{-1}((x, (1 - 2t)\Phi(x))) \end{aligned}$$

est un difféomorphisme. Soit $t \in [0, 1]$, on a $f(\mathring{S} \times \{t\})$ transverse au champ de Reeb donc da est positive sur $f(\mathring{S} \times \{t\})$ (en effet $\varphi(f(\mathring{S} \times \{t\}))$ est transverse à $\frac{\partial}{\partial t}$).

On appelle $H = V \setminus \mathring{N}$. Tout comme N , la variété à bord H est un corps en anses. On note F_i où $i \in 1 \cdots n$ les faces de la cellulation et $D_i = F_i \cap H$ où $i \in 1 \cdots n$. Les D_i forment un système de disques de compression pour H . Si on découpe H le long des D_i on obtient des domaines sur lesquels la structure est tendue car ils sont inclus dans des cartes de Darboux.

Étape 6. *On modifie N et H pour garantir que pour tout i on ait ∂D_i legendrien d'invariant de Thurston-Bennequin -1 et D_i convexe.*

On veut utiliser le lemme de réalisation (corollaire 2.23, page 19), il faut néanmoins prendre quelques précautions. La démonstration de ce lemme repose sur le tracé d'un feuilletage \mathcal{F} découpé par K pour lequel les courbes D_i sont legendriennes. Quitte à modifier D_i on peut faire coïncider ∂D_i avec une courbe legendrienne au voisinage de $K \cap \partial D_i$. On peut supposer qu'au voisinage de K le feuilletage tracé est le même que le feuilletage caractéristique car K est transverse.

5. En fait il faut être plus prudent car la présence d'arêtes supplémentaires peut forcer des intersections. Pour éviter ces problèmes, il faut subdiviser à nouveau les faces le long d'arcs legendriens.

Soit W un ouvert de V ne rencontrant ni le 1-squelette ni S et tel que sur $\partial N \cap (V \setminus W)$, le feuilletage \mathcal{F} soit égal au feuilletage caractéristique. On suppose aussi que $W \subset U$ où U est défini au niveau de l'étape 5.2 comme l'ouvert difféomorphe à $\Sigma \times]-\varepsilon, \varepsilon[$.

D'après le théorème 2.22, page 17, il existe un difféomorphisme de V préservant l'orientation qui est l'identité en dehors de W , tel que l'image de ∂N soit transverse au champ de Reeb et découpée par K , et tel que les images des ∂D_i soient legendriennes. On transforme tous les objets construits jusqu'à présent et on les note toujours de la même manière. Toutes les propriétés sont conservées sauf le fait que $d\alpha$ est positive sur les $f(\mathring{S} \times \{t\})$. On est amené à modifier l'application de $N \setminus K \rightarrow \mathring{S} \times [-1, 1]$. On se place dans $S \times]-\varepsilon, \varepsilon[$, comme dans la démonstration de l'étape 5.2, $\partial N \setminus K$ est constitué de deux graphes sur \mathring{S} . On construit alors un difféomorphisme dans $\mathring{S} \times [-1, 1]$ de la même manière.

Les courbes ∂D_i sont donc legendriennes. Les singularités du feuilletage caractéristique sur le bord ne changent de signe que deux fois donc l'invariant de Thurston-Bennequin est -1 , 0 ou 1 . Comme D_i est un disque, d'après les inégalités de Bennequin (théorème 1.22, page 9), $\text{tb}(\partial D_i) = -1$ pour tout i .

Les D_i sont à bord legendrien d'invariants de Thurston-Bennequin -1 , donc on peut modifier les faces de la cellulation loin du 1-squelette pour obtenir que les D_i soient convexes.

Étape 7. *Sur H la structure ξ est tendue.*

Chaque disque de compression D_i est convexe, vérifie $\text{tb}(\partial D_i) = -1$ et est inclus dans un ouvert d'une carte de Darboux. Soit Γ_i une courbe de découpage de D_i . Comme ξ est tendue au voisinage de D_i , la courbe Γ_i ne contient que des segments joignant deux points du bord. De plus Γ_i ne contient qu'une seule composante joignant deux points du bord car $\text{tb}(\partial D_i) = -1$. Par conséquent Γ_i est parallèle au bord. On peut donc appliquer le théorème 2.30 (page 20) successivement à tous les disques D_i . Donc (H, ξ) est tendue.

Étape 8. *Il existe $H' \subset S \times \mathbb{R}$ difféomorphe à H tel que $\partial H' = K \cup \Phi(\mathring{S}) \cup \Psi(\mathring{S})$ où $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $\Psi : S \rightarrow \mathbb{R}_-^*$ sont des applications lisses.*

Pour tout $i \in 1 \cdots p$, notons K_i une courbe lisse joignant dans D_i les deux intersections de D_i et K . Découpons H le long des disques de compression D_i , on obtient une collection d'ensembles B_j , $j \in 1 \cdots s$ homéomorphes à des boules.

Étape 8.1. *Pour tout $j \in 1 \cdots s$, la courbe $\Gamma = \left(K \bigcup_{i=1}^n K_i \right) \cap B_j$ ne possède qu'une seule composante connexe.*

Pour tout $j \in 1 \cdots s$, l'ensemble B_j est inclus dans une carte de Darboux définie sur un ouvert U . Notons $i_1 \cdots i_q$ les indices tels que $D_{i_k} \subset \partial B_j$. Pour tout $k = 1 \cdots q$ il existe W_k un voisinage de ∂D_{i_k} tel que $K \cap W_k$ ne soit constitué que de deux segments qui traversent ∂D_{i_k} . On peut supposer que les ensembles W_k sont disjoints et on note $W = \bigcup_{k=1}^q W_k$. On lisse B_j dans W pour obtenir une boule lisse B'_j . On effectue une isotopie \mathcal{C}^∞ -petite pour rendre B'_j convexe tout en restant dans U et en garantissant qu'en dehors de W l'image des courbes de découpage reste transverses au feuilletage caractéristique et séparent les singularités à divergence positives et les singularités à divergence négatives. La structure de contact est tendue au voisinage de B'_j et par conséquent la courbe de découpage Γ' de B'_j ne contient qu'une seule composante connexe. De plus, on peut faire coïncider Γ' avec les images des courbes de découpage en dehors de W .

On sait que $\partial W_k \cap \Gamma = \partial W_k \cap \Gamma'$. Cet ensemble est constitué de quatre points, deux dans D_{i_k} , notés A_1 et A_2 et deux dans ∂H notés B_1 et B_2 . De plus, par hypothèse sur W , on peut supposer que Γ relie A_1 et B_1 ainsi que A_2 et B_2 . Comme Γ' ne possède qu'une seule composante connexe Γ' relie A_1 et B_1 , A_2 et B_2 ou bien A_1 et B_2 , A_2 et B_1 . Dans les deux cas les quatre points sont sur la même composante connexe. Ainsi Γ ne possède qu'une seule composante connexe.

La variété à bord H est un corps en anses, donc difféomorphe à un corps en anses dans \mathbb{R}^3 . On se place désormais dans \mathbb{R}^3 repéré par les coordonnées (x, y, z) . On va donner à H une forme agréable pour réaliser S dans H et construire le difféomorphisme cherché.

Pour tout $i \in 1 \cdots p$, il existe un difféomorphisme $f_i : D(0, 1) \times [-1, 1] \rightarrow C_i \subset H$ tel que $f_i(D(0, 1) \times \{0\}) = D_i$ et que K intersecte $f_i(D(0, 1) \times \{t\})$ en exactement deux points pour tout $t \in [-1, 1]$. L'ensemble $H \setminus (\bigcup_{i=1}^p C_i)$ est une union de boules que l'on note B_j'' .

Notons $D_i^1 = f_i(D(0, 1) \times \{-1\})$ et $D_i^2 = f_i(D(0, 1) \times \{1\})$. Soient K_i^1 une courbe dans D_i^1 joignant les deux points d'intersection avec K et K_i^2 une courbe analogue dans D_i^2 . Alors, d'après l'étape précédente, $K' = K \cup \bigcup_{i=1}^p K_i^1 \cup \bigcup_{i=1}^p K_i^2$, ne possède qu'une seule composante connexe sur chaque boule B_j'' . Par conséquent on peut isotoper B_j'' pour obtenir un ensemble symétrique par rapport au plan $P = \{(x, y, 0), x, y \in \mathbb{R}\}$ tel que $K = \partial B_j'' \cap P$. On peut ainsi supposer que H a la forme suivante :

- les boules B_j'' sont symétriques par rapport à P , $K = \partial B_j'' \cap P$ et $\partial B_j'' \setminus K$ est constitué de deux graphes sur P ;
- pour tout $i \in 1..p$, les ensembles $C_i^1 = f_i(D(0, 1) \times [-1, -\frac{1}{2}])$ et $C_i^2 = f_i(D(0, 1) \times [\frac{1}{2}, 1])$ sont des cylindres de rayon 1 symétriques par rapport à P ;
- $K \cap C_i^1 = \partial C_i^1 \cap P$ et $K \cap C_i^2 = \partial C_i^2 \cap P$.

Pour tout $i \in 1 \cdots p$, il existe un difféomorphisme $g_i : C_i \rightarrow [-1, 1] \times D(0, 1)$ tel que la restriction de g_i à C_i^1 et à C_i^2 soit affine et que $g_i(K \cap C_i) = ([-1, 1] \times \partial D(0, 1)) \cap P$.

On construit une surface orientée S_1 dans H de bord K de la façon suivante : dans B_j'' on prend $S_1 = B_j'' \cap P$ et on oriente pour que la normale rentre dans le demi-plan contenant S_- (défini car K découpe ∂H), dans C_i on transporte par g_i^{-1} la surface définie de façon analogue dans $[-1, 1] \times D(0, 1)$. Les différentes parties de S_1 se recollent bien car la construction sur C_i^1 et à C_i^2 prolonge celle sur les boules B_j'' . En effet S_1 est constitué du plan contenant K intersecté avec H et g_i restreint à C_i^1 et à C_i^2 préserve les plans car c'est une application affine. La surface S_1 est difféomorphe à S .

Plaçons nous dans $S_1 \times \mathbb{R}$. On peut transporter H grâce aux applications définies dans les paragraphes précédents. On obtient alors le résultat cherché.

Bilan. À ce stade, nous avons construit une page et la reliure K du livre ouvert ainsi qu'un scindement de Heegaard de V . Nous avons feuilleté un des corps en anses et donné une forme particulière au second. On est amené à la situation suivante :

- $V = H \cup N$ avec $\partial H = \partial N = H \cap N$;
- K est positivement transverse ;
- $N \setminus K$ est difféomorphe à $\dot{S} \times [0, 1]$;
- Il existe $H' \subset S \times \mathbb{R}$ tel que $\partial H' = K \cup \Phi(\dot{S}) \cup \Psi(\dot{S})$ où $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $\Psi : S \rightarrow \mathbb{R}_-^*$ sont des applications lisses, tel que H soit difféomorphe à H' ;
- $d\alpha$ est strictement positive sur les pages de N ;
- ∂N est convexe de courbe de découpage K ;
- H admet un système total de disques de compression convexes d'invariants de Thurston-Bennequin valant -1 ;
- (H, ξ) est tendue.

4.4 Obtention d'une équation de contact plus appropriée

L'objectif de cette section est de construire un livre ouvert qui porte la structure ξ et une équation de ξ qui permette de le montrer. Pour cela nous allons construire un difféomorphisme de $H \setminus K$ dans $\dot{S} \times [0, 1]$ et une équation α_0 de ξ telle que $d\alpha_0 > 0$ sur les pages (images réciproques de $\dot{S} \times \{t\}$). Enfin, il faudra recoller les deux difféomorphismes de N et H dans $\dot{S} \times [0, 1]$ pour former un livre ouvert et les deux équations de contact obtenues sur N et H . Commençons par donner un théorème d'unicité des structures de contact tendues définies sur un corps en anses et fixées sur un voisinage du bord.

Lemme 4.12. Soit (H, ξ) un corps en anses portant une structure tendue, muni d'un système complet de disques de compression $D_i, i = 1 \cdots p$, convexes à bord legendrien d'invariant de Thurston-Bennequin -1 . Si ξ' est une autre structure sur H qui coïncide avec ξ sur un voisinage de ∂H et qui est tendue alors ξ' est isotope à ξ relativement à ∂H .

Démonstration. Il existe une isotopie de ξ' relative au bord de H telle que les disques D_i soient convexes pour ξ' car $\text{tb}_{\xi'}(\partial D_i) = \text{tb}_{\xi}(\partial D_i) = -1$. On note Γ_i et Γ_i' des courbes de

découpage des D_i pour ξ et ξ' . On peut supposer que $\Gamma_i = \Gamma'_i$ au voisinage de ∂D_i car les deux structures coïncident au voisinage de ∂D_i .

Comme les deux structures sont tendues Γ_i et Γ'_i ne contiennent pas de composante connexe bordant un disque, toutes les composantes connexes sont des segments joignant deux points du bord. De plus comme $\text{tb}_\xi(\partial D_i) = \text{tb}_{\xi'}(\partial D_i) = -1$, les courbes Γ_i et Γ'_i n'ont qu'une seule composante connexe joignant deux points du bord. Par conséquent Γ_i et Γ'_i ne possèdent chacune qu'une seule composante connexe. Donc ces deux courbes de découpages sont isotopes relativement à un voisinage du bord de D_i . On étend l'isotopie δ_s à tout le corps en anse par une isotopie qui est l'identité au voisinage du bord et en dehors d'un voisinage de D_i : il suffit de prolonger le champ de vecteurs $\frac{\partial \delta_s}{\partial s}$ en prenant le champ nul en dehors d'un voisinage de D_i et au voisinage du bord et de considérer le flot. On transporte alors ξ' par cette isotopie au temps 1 : la nouvelle structure obtenue, notée ξ' , est toujours tendue. Elle vaut ξ au voisinage du bord et trace le même feuilletage que ξ sur D_i . On effectue cette opération sur tous les disques de compression.

Soit $i \in 1 \cdots p$. Les deux structures de contact ξ et ξ' tracent respectivement le feuilletage caractéristique \mathcal{F} et \mathcal{F}' sur D_i . Ces deux feuilletages ont la même courbe de découpage Γ et par conséquent \mathcal{F} est adapté à Γ pour ξ' . Le théorème 2.22 page 17 permet alors de construire une isotopie φ_t qui est l'identité en dehors d'un voisinage de D_i et au voisinage du bord de H telle que l'image de ξ' trace le feuilletage \mathcal{F} sur D_i . On transporte alors à nouveau ξ' par φ_1 . On effectue cette opération pour tous les disques de compression. On obtient une structure de contact isotope à ξ' qui est égale à ξ au voisinage du bord de H et trace le même feuilletage caractéristique sur les disques de compression.

En découpant le long des disques de compression et en lissant on obtient des boules portant deux structures tendues égales sur le bord. D'après le théorème 2.27 (page 19) elles sont homotopes parmi les structures de contact donc isotopes par le théorème de Gray (théorème 1.8, page 6). \square

Sur $S \times \mathbb{R}$, on définit la structure de contact ξ_0 par l'équation $\alpha_0 = dt + \beta$, où β est la primitive d'une forme d'aire sur S positive sur le bord. Le champ de Reeb associé à α_0 est $\frac{\partial}{\partial t}$.

Étape 9. *Il existe $H'' \subset S \times \mathbb{R}$ tel que (H, ξ) est contactomorphe à (H'', ξ_0) et $\partial H'' = K \cup \chi(\dot{S}) \cup \psi(\dot{S})$ où $\chi : S \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $\psi : S \rightarrow \mathbb{R}_-^*$ sont des applications lisses.*

D'après ce qui précède, il existe $H' \in S \times \mathbb{R}$ difféomorphe à H tel que $\partial H' = K \cup \Phi(\dot{S}) \cup \Psi(\dot{S})$ où $\Phi : S \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $\Psi : S \rightarrow \mathbb{R}_-^*$ sont des applications lisses. On transporte la structure ξ sur H' , on la note toujours ξ . Notons \mathcal{F} le feuilletage caractéristique sur $\partial H'$ associé à ξ et \mathcal{F}_0 le feuilletage caractéristique sur $\partial H'$ associé à ξ_0 .

Il existe un difféomorphisme de H' dans H' qui envoie \mathcal{F} sur \mathcal{F}_0 au voisinage de $(\partial S) \times \{0\}$. On transporte ξ par ce difféomorphisme, on obtient une nouvelle structure de contact toujours notée ξ et un nouveau feuilletage caractéristique toujours noté \mathcal{F} .

D'après le lemme 4.11, page 32, $\partial H'$ est convexe pour la structure ξ_0 de courbe de découpage $(\partial S) \times \{0\}$. Ainsi \mathcal{F} est adapté à $(\partial S) \times \{0\}$. D'après le théorème 2.22, page 17, hors d'un voisinage de $(\partial S) \times \{0\}$, on peut modifier $\partial H'$ par un difféomorphisme f , en gardant la transversalité avec $\frac{\partial}{\partial t}$, de sorte que $f(\partial H')$ ait pour feuilletage caractéristique $f(\mathcal{F})$. On note $H'' = f(H')$ et on transporte ξ sur H'' par f . Comme $\partial H''$ est transverse à $\frac{\partial}{\partial t}$ hors d'un voisinage de $(\partial S) \times \{0\}$ sur lequel il vaut $\partial H'$, on a bien $\partial H'' = K \cup \chi(\dot{S}) \cup \psi(\dot{S})$ où $\chi : S \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ et $\psi : S \rightarrow \mathbb{R}_-^*$ sont des applications lisses.

On est alors dans la situation suivante : (H, ξ) est contactomorphe à (H'', ξ) , la surface $\partial H''$ a pour feuilletage caractéristique $\mathcal{F}' = f(\mathcal{F})$. De plus H'' porte aussi la structure de contact ξ_0 , et le feuilletage caractéristique de $\partial H''$ pour cette structure est aussi \mathcal{F}' .

D'après le théorème 2.10, page 13, il existe un germe de difféomorphisme isotope à l'identité qui conjugue ξ et ξ_0 . Notons φ_t cette isotopie et $X_t = \frac{\partial \varphi_t}{\partial t}$. On construit un champ Y_t sur H'' qui vaut X_t au voisinage de $\partial H''$ (on utilise une partition de l'unité en prenant le champ nul sur les ouverts où X_t n'est pas défini). Le flot ψ_t de Y_t est défini jusqu'au temps 1, il vaut φ_t au voisinage de $\partial H''$ et donc conjugue ξ_0 et ξ localement. On transporte ξ par ψ_1 . Enfin on utilise le lemme précédent pour conclure.

Le bord de H'' est l'union de $(\partial S) \times \{0\}$ et de deux graphes sur \dot{S} ; par conséquent, comme dans les démonstrations précédentes, on peut construire un difféomorphisme de $H'' \setminus K$ dans

$\mathring{S} \times [-1, 1]$ en prenant des barycentres sur la verticale. Les images réciproques de $\mathring{S} \times \{t\}$ sont positivement transverses à $\frac{\partial}{\partial t}$. On transporte ce feuilletage sur H ainsi que l'équation α_0 , la 2-forme $d\alpha_0$ est positive sur les pages.

Bilan. On a donc feuilleté le second corps en anses du scindement de Heegaard de V et construit une équation de ξ de différentielle positive sur les pages. La situation est la suivante :

- $V = H \cup N$ avec $\partial H = \partial N = H \cap N$;
- K est positivement transverse ;
- $N \setminus K$ est difféomorphe à $\mathring{S} \times [0, 1]$;
- $d\alpha$ est strictement positive sur les pages de N ;
- $H \setminus K$ est difféomorphe à $\mathring{S} \times [0, 1]$;
- $d\alpha_0$ est strictement positive sur les pages de H .

Par conséquent, il existe $h : \mathring{S} \rightarrow \mathring{S}$ telle que $V \setminus K$ est difféomorphe à $\mathring{S} \times [0, 1]/h$. Sur $\mathring{S} \times [0, 1]/h$ on considère l'application projection sur la seconde coordonnée. On déduit de cette application une fibration θ sur $V \setminus K$. Pour vérifier qu'il s'agit bien d'un livre ouvert on utilise le critère donné dans la proposition 3.2 (page 21).

Étape 10. Le livre ouvert (K, θ) porte ξ .

Comme (K, θ) est un livre ouvert, il existe un voisinage de K et un difféomorphisme

$$\Phi : U \rightarrow K \times D(0, 1)$$

tel que l'image de K soit $K \times \{0\}$ et que, si on munit $K \times D(0, 1)$ des coordonnées cylindriques (z, r, ψ) , alors $\theta \circ \Phi(z, r, \psi) = \psi$. Soit $\psi \in S^1$, notons $P_\psi = \{(z, r, \psi) \in K \times D(0, 1), z \in K, r \in [0, 1]\} = \theta^{-1}(\psi)$. Quitte à restreindre U , on peut supposer que dans $\Phi(U)$ l'image de ξ est transverse $\frac{\partial}{\partial z}$ en tout point. Considérons le champ de vecteurs X_ψ de direction donnée par l'intersection entre TP_ψ et ξ de norme 1 et de composante radiale sortante. Notons φ^ψ le flot de ce champ de vecteurs. On définit l'application f par

$$\begin{aligned} f : K \times [0, a] \times S^1 &\rightarrow K \times [0, 1] \times S^1 \\ (z, r, \psi) &\mapsto \varphi_r^\psi((z, 0)) \end{aligned}$$

où a est suffisamment petit pour que φ^ψ soit défini jusqu'au temps a pour tout ψ . On transporte la structure de contact sur U par ce difféomorphisme. Comme f préserve la coordonnée angulaire les pages ne changent pas. On transporte l'équation de contact α , elle s'écrit sous la forme $\tilde{\alpha} = p(z, r, \psi)dz + q(z, r, \psi)d\psi$ car le vecteur $\frac{\partial}{\partial r}$ appartient toujours à ξ par construction. On sait que $p > 0$.

On cherche une fonctions g telle que $d(g\alpha)$ soit positive sur les pages. Soit $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction ⁶ telle que

$$\frac{\partial(p \cdot g \circ f^{-1})}{\partial r} < 0$$

dans un voisinage de $r = 0$. On obtient $(f^{-1})^*(g\alpha) = p_1(z, r, \psi)dz + q_1(z, r, \psi)d\psi$ avec $\frac{\partial p_1}{\partial r} < 0$ dans $K \times [0, b] \times S^1$ avec $b < 1$. La 2-forme $d\alpha_1$ induit une forme volume sur les pages. L'image réciproque de l'ensemble $K \times [0, \frac{b}{2}] \times S^1$ par f contient $K \times [0, c] \times S^1$ avec $c < a$.

Dans $\tilde{V} = V \setminus \Phi^{-1}(K \times D(0, c))$ on interpole les deux équations de contact α et α_0 de la façon suivante : la restriction $\tilde{\theta}$ de θ à \tilde{V} est une fibration de fibre notée \tilde{S} . Sur $\tilde{\theta}^{-1}(\tilde{S} \times [\frac{1}{2}, 1])$ on a construit une équation de ξ notée α_0 dont la différentielle induit une forme volume sur les pages. L'équation α de ξ est définie sur V et sa différentielle est positive sur les pages dans $\theta^{-1}(S \times [0, \frac{1}{2}])$. Par conséquent il existe $\varepsilon > 0$ tel que $d\alpha$ induise une forme volume sur les pages restreintes à $\tilde{\theta}^{-1}(\tilde{S} \times [-\varepsilon, 0])$. On transporte α et α_0 sur $\tilde{S} \times [-\varepsilon, 0]$ et on pose $\alpha_2 = h(t)\alpha + (1 - h(t))\alpha_0$ où $h : [-\varepsilon, 0] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction croissante qui vaut 0 au voisinage de $-\varepsilon$ et 1 au voisinage de 0. On obtient bien une équation de ξ car α et α_1 sont des équations de ξ ayant la même orientation. On a bien $d\alpha_2$ transverse aux pages sur V' car $d\alpha_2 \wedge dt > 0$. On transporte cette équation dans V' et on la note toujours α_2 .

On transporte l'équation α_2 par f et on obtient en équation de ξ que l'on note toujours α_2 définie sur $K \times [\frac{b}{2}, b] \times S^1$. L'équation α_1 est définie sur $K \times [0, b] \times S^1$. Posons $\alpha_3 = M(1 - \chi(t))\alpha_1 + \chi(t)\alpha_2$ où $M \in \mathbb{R}_+$ et $\chi : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction qui vaut 0 au voisinage

6. On peut prendre $g(r) = \exp(-Ar)$ avec A assez grand.

de 0 et 1 au voisinage de b . Les équations de contact α_1 et α_2 définissent la même orientation donc α_3 est bien une équation de contact. L'équation α_3 est bien positive sur la reliure. Il reste à vérifier que sa différentielle induit une forme volume sur les pages, c'est à dire que $d\alpha_3 \wedge d\psi > 0$. On a :

$$d\alpha_3 \wedge d\psi = \chi'(M\alpha_1 \wedge dr \wedge d\psi - \alpha_2 \wedge dr \wedge d\psi) + M(1 - \chi)d\alpha_1 \wedge d\psi + \chi d\alpha_2 \wedge d\psi.$$

Comme $d\alpha_1$ et $d\alpha_2$ induisent des formes volume sur les pages les deux derniers termes sont positifs. De plus $\alpha_1 = p(z, r, \psi)dz + q(z, r, \psi)d\psi$ donc $\alpha_1 \wedge dr \wedge d\psi$ est positif. Donc pour M assez grand on a le résultat cherché.

Conclusion

Nous avons donc montré que toute structure de contact est portée par un livre ouvert (et que tout livre ouvert porte une structure de contact). Quelques points de la démonstration doivent néanmoins être précisés. Il reste à détailler la démonstration du deuxième théorème de décomposition en livre ouvert : deux livres ouverts sur une variété close V portent des structures de contact isotopes si et seulement s'ils possèdent des stabilisations isotopes.

Par ailleurs, les structures de contact et les livres ouverts peuvent aussi être définis sur une variété de dimension impaire. Il existe aussi des théorèmes de décomposition en livre ouvert sur de telles variétés. Un autre axe d'étude est de généraliser ce genre de constructions aux surfaces à bord.

Je ne voudrais pas conclure ce rapport sans remercier vivement Vincent Colin ainsi qu'Emmanuel Giroux, Patrick Massot et François Laudenbach pour l'aide très précieuse qu'ils m'ont apporté tout au long de ce stage. Merci enfin à Marc pour ses relectures, ses conseils typographiques et son soutien.

Bibliographie

- [1] R. H. Bing. An alternative proof that 3-manifolds can be triangulated. *Ann. of Math. (2)*, 69 :37–65, 1959.
- [2] Vincent Colin. Recollement de variétés de contact tendues. *Bull. Soc. Math. France*, 127(1) :43–69, 1999.
- [3] Vincent Colin. Livres ouverts en géométrie de contact (d’après Emmanuel Giroux). Séminaire Bourbaki, Vol. 2006/2007, 2006.
- [4] Y. Eliashberg. Classification of overtwisted contact structures on 3-manifolds. *Invent. Math.*, 98(3) :623–637, 1989.
- [5] John B. Etnyre. Introductory lectures on contact geometry. In *Topology and geometry of manifolds (Athens, GA, 2001)*, volume 71 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pages 81–107. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [6] John B. Etnyre. Lectures on open book decompositions and contact structures. In *Floer homology, gauge theory, and low-dimensional topology*, volume 5 of *Clay Math. Proc.*, pages 103–141. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [7] Hansjörg Geiges. Contact geometry. In *Handbook of differential geometry. Vol. II*, pages 315–382. Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2006.
- [8] Emmanuel Giroux. Convexité en topologie de contact. *Comment. Math. Helv.*, 66(4) :637–677, 1991.
- [9] Emmanuel Giroux. Topologie de contact en dimension 3 (autour des travaux de Yakov Eliashberg). *Astérisque*, (216) :Exp. No. 760, 3, 7–33, 1993. Séminaire Bourbaki, Vol. 1992/93.
- [10] Emmanuel Giroux. Géométrie de contact : de la dimension trois vers les dimensions supérieures. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002)*, pages 405–414, Beijing, 2002. Higher Ed. Press.
- [11] Ko Honda. On the classification of tight contact structures. I. *Geom. Topol.*, 4 :309–368 (electronic), 2000.
- [12] Ko Honda. Gluing tight contact structures. *Duke Math. J.*, 115(3) :435–478, 2002.
- [13] Jacques Lafontaine. *Introduction aux variétés différentielles*. Presses Universitaires de Grenoble, 1996.
- [14] Jacob Palis, Jr. and Welington de Melo. *Introdução aos sistemas dinâmicos*, volume 6 of *Projeto Euclides [Euclid Project]*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1978.
- [15] Dale Rolfsen. *Knots and links*, volume 7 of *Mathematics Lecture Series*. Publish or Perish Inc., Houston, TX, 1990. Corrected reprint of the 1976 original.