

# Géométrie symplectique

## École CIMPA de géométrie et applications

Anne Vaugon

23 juin 2022

Ces notes de cours ont été rédigées pour l'école CIMPA *Géométrie et application*. Cette école a eu lieu à Brazzaville du 13 au 25 juin 2022. Il s'agit d'une présentation classique des notions de base en géométrie symplectique. Ces notes s'inspirent tout particulièrement des deux ouvrages cités en référence. Elles sont particulièrement susceptibles de contenir des typos et des imprécisions !

### 1 Un peu d'algèbre linéaire symplectique

Soit  $V$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension  $m$ .

**Définition 1.** Une forme bilinéaire alternée  $\Omega$  sur  $V$  est dite *non-dégénérée* si l'application  $V \rightarrow V^*$  définie par  $v \mapsto \Omega(v, \cdot)$  est un isomorphisme. Une telle forme est appelée *forme symplectique linéaire*. Le couple  $(V, \Omega)$  est un *espace symplectique linéaire*.

Soit  $W$  un sous-espace vectoriel de  $V$ . Soit  $\Omega$  une forme bilinéaire alternée sur  $V$ . L'orthogonal de  $W$  pour  $\Omega$  est défini par

$$W^{\perp\Omega} = \{v \in V, \Omega(v, w) = 0 \text{ pour tout } w \in W\}.$$

**Lemme 2.** Si  $\Omega$  est non dégénérée et  $W$  est un sous-espace vectoriel de  $V$ , on a

$$\dim(W) + \dim(W^{\perp\Omega}) = \dim(V).$$

*Démonstration.* Voir TD. □

**Proposition 3.** Soit  $\Omega$  une forme bilinéaire alternée sur  $V$ . Alors, il existe une base

$$(u_1, \dots, u_k, e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$$

telle que

$$\Omega = \sum_{i=1}^n e_i^* \wedge f_i^*$$

où  $(u_1^*, \dots, u_k^*, e_1^*, \dots, e_n^*, f_1^*, \dots, f_n^*)$  est la base duale de  $(u_1, \dots, u_k, e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$ .

*Démonstration.* On commence par traiter le cas  $\Omega$  non dégénérée par récurrence sur la dimension. Soit  $e_1 \in V$  non nul. Comme  $\Omega$  est non dégénérée, il existe  $f_1 \in V$  tel que  $\Omega(e_1, f_1) = 1$ . Comme  $\Omega$  est alternée,  $e_1$  et  $f_1$  ne sont pas colinéaires. Si  $V$  est de dimension 2, on a terminé. Supposons maintenant que  $V$  est de dimension strictement supérieure à 2. Montrons que  $\text{Vect}(e_1, f_1)$  et  $\text{Vect}(e_1, f_1)^{\perp\Omega}$  sont en somme directe. Par le lemme précédent, il suffit de montrer que leur intersection est réduite à  $\{0\}$ . On se donne donc  $ae_1 + bf_1 \in \text{Vect}(e_1, f_1)^{\perp\Omega}$ . On a alors

$$\Omega(ae_1 + bf_1, -be_1 + af_1) = a^2 + b^2 = 0.$$

On en déduit que

$$\text{Vect}(e_1, f_1) \cap \text{Vect}(e_1, f_1)^{\perp\Omega} = \{0\}$$

ce qu'on voulait montrer. Montrons maintenant que

$$\Omega : \text{Vect}(e_1, f_1)^{\perp\Omega} \times \text{Vect}(e_1, f_1)^{\perp\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$$

est non dégénérée. Soit  $u \in \text{Vect}(e_1, f_1)^{\perp\Omega}$ . Comme  $\Omega$  est non dégénérée, il existe  $v \in V$  tel que  $\Omega(u, v) \neq 0$ . On écrit  $v = w + w_{\perp}$  avec  $w \in \text{Vect}(e_1, f_1)$  et  $w_{\perp} \in \text{Vect}(e_1, f_1)^{\perp\Omega}$ . On a alors

$$\Omega(u, v) = \Omega(u, w) + \Omega(u, w_{\perp}) = \Omega(u, w_{\perp}) \neq 0.$$

On obtient donc la non-dégénérescence voulue. On conclut en utilisant la récurrence pour obtenir une base  $(e_2, \dots, e_n, f_2, \dots, f_n)$  de  $\text{Vect}(e_1, f_1)^{\perp\Omega}$  dans laquelle  $\Omega$  a la forme désirée. La base  $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$  convient.

On traite maintenant le cas général. Soit  $U$  le noyau de l'application linéaire  $v \mapsto \Omega(v, \cdot)$ . On choisit  $W$  un supplémentaire de  $U$ . Montrons que

$$\Omega : W \times W \rightarrow \mathbb{R}$$

est non dégénérée. Nous avons déjà fait une preuve similaire dans le cas précédent. Soit  $u \in W$ . Comme  $\Omega$  est non dégénérée, il existe  $v \in V$  tel que  $\Omega(u, v) \neq 0$ . On écrit  $w = w_U + w_W$  avec  $w_U \in U$  et  $w_W \in W$ . On a alors

$$\Omega(u, v) = \Omega(u, w_U) + \Omega(u, w_W) = \Omega(u, w_W) \neq 0.$$

On obtient donc la non-dégénérescence. On applique alors le premier cas à la restriction de  $\Omega$  à  $W$  pour obtenir une base  $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$  de  $W$ . On complète cette base par une base  $(u_1, \dots, u_k)$  de  $U$ . La base obtenue convient.  $\square$

**Remarque 4.** Avec les notations de la proposition,  $\text{Vect}(u_1, \dots, u_k)$  est appelé le noyau de  $\Omega$ . On a alors que  $\Omega$  est non dégénérée si et seulement si son noyau est  $\{0\}$ . En effet, le noyau de  $\Omega$  est le noyau de l'application  $v \mapsto \Omega(v, \cdot)$ .

Toute forme symplectique linéaire  $\Omega$  s'écrit donc

$$\Omega = \sum_{i=1}^n e_i^* \wedge f_i^*$$

dans une base adaptée  $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$ . Une telle base est appelée *base symplectique* et  $\Omega$  dans cette base une *forme symplectique standard*. Un espace vectoriel symplectique est toujours de dimension paire ( $2n$  avec les notations précédentes).

**Remarque 5.** La forme  $\Omega$  est non dégénérée où  $V$  est de dimension  $2m$  si et seulement si  $\Omega^m$  est non nulle. En effet, dans la base  $(u_1, \dots, u_k, e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$  de la proposition précédente

$$\Omega^n = n! e_1^* \wedge \dots \wedge e_n^* \wedge f_1^* \wedge \dots \wedge f_n^*.$$

Notons que dans ces notations  $2m = 2n + k$ . Donc si  $n = m$  (c'est à dire si  $\Omega$  est non dégénérée),  $\Omega^m$  est bien non nulle. Et si  $n < m$  (c'est à dire si  $\Omega$  est dégénérée),  $\Omega^m = 0$ .

Dans une base symplectique, la matrice de  $\Omega$  est

$$\begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix}.$$

Considérons maintenant l'application linéaire  $J$  de matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & -\text{Id} \\ \text{Id} & 0 \end{pmatrix}$$

dans une base symplectique.

**Propriété 6.** Pour tous  $u, v \in V$ , on a

- $\Omega(u, Jv) = \langle u, v \rangle$
- $\Omega(Ju, Jv) = \Omega(u, v)$

*Démonstration.* On calcule (exercice). □

**Remarque 7.** Introduire  $J$  est en fait une idée naturelle. Si on identifie  $\mathbb{R}^{2n}$  à  $\mathbb{C}^n$  en posant  $z_j = x_j + iy_j$ . Alors  $J$  correspond à la multiplication par  $i$ . Plus précisément  $J(z_1, \dots, z_n) = (iz_1, \dots, iz_n)$ . La propriété précédente nous dit que, dans la base canonique, la forme symplectique standard, le produit scalaire standard et la structure complexe sont compatibles.

### Symplectomorphismes linéaires.

**Définition 8.** On se place dans  $(V, \Omega)$  un espace vectoriel symplectique. Une application linéaire  $A : V \rightarrow V$  est une *symplectomorphisme linéaire* si  $\Omega(Au, Av) = \Omega(u, v)$  pour tous  $u, v \in V$ .

On note  $\text{Sp}(V, \Omega)$  le groupe des symplectomorphismes. On note  $\text{Sp}(2n)$  le groupe des symplectomorphismes de  $\mathbb{R}^{2n}$  muni de la structure symplectique standard. On a alors

$$\text{Sp}(2n) = \{A \in M_{2n}(\mathbb{R}), {}^t A \Omega_0 A = \Omega_0\}$$

où

$$\Omega_0 = \begin{pmatrix} 0 & \text{Id} \\ -\text{Id} & 0 \end{pmatrix}.$$

### Sous-espaces vectoriels des espaces vectoriels symplectiques

**Définition 9.** Soit  $W$  un sous espace vectoriel de  $(V, \Omega)$ , un espace vectoriel symplectique de dimension  $2n$ . Alors

- $W$  est dit *symplectique* si  $\Omega|_W$  est symplectique ;
- $W$  est dit *isotrope* si  $\Omega|_W = 0$  ;
- $W$  est dit *lagrangien* si  $\dim(W) = n$  et  $\Omega|_W = 0$ .

**Exemple 10.** On se place toujours dans une base symplectique  $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$ . Alors

1.  $\text{Vect}(e_1, f_1)$  est un sous-espace vectoriel symplectique ;
2.  $\text{Vect}(e_1, e_2)$  est un sous-espace vectoriel isotrope ;
3.  $\text{Vect}(e_1, \dots, e_n)$  est un sous-espace vectoriel lagrangien.

**Propriété 11.** Un sous-espace vectoriel  $W$  est isotrope si et seulement si  $W \subset W^{\perp\Omega}$ .

En particulier, si  $V$  est de dimension  $2n$ , un sous-espace isotrope est de dimension au plus  $n$ . Les sous-espaces lagrangiens sont donc les sous-espaces isotropes de dimension maximale.

**Proposition 12.** Soit  $W$  un sous espace vectoriel de  $(V, \Omega)$  un espace vectoriel symplectique de dimension  $2n$ .

1. Si  $W$  est isotrope alors il est contenu dans un sous-espace lagrangien.
2. Si  $W$  est lagrangien, on considère une base  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $W$ . Alors, on peut compléter cette base en une base symplectique  $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$  de  $V$ .

Cette proposition montre que les sous-espaces lagrangiens sont tous les mêmes.

*Démonstration.* On commence par montrer le premier point. Comme  $W$  est isotrope, on a  $W \subset W^{\perp\Omega}$ . Si on a égalité,  $W$  est lagrangien et le problème est résolu. Sinon, il existe  $u \in W^{\perp\Omega}$  tel que  $u \notin W$ . On considère alors  $W' = W \oplus \mathbb{R}u$ . Le sous-espace  $W'$  reste isotrope. En effet, si  $v = w + au$  avec  $w \in W$  et  $v' = w' + a'u$  avec  $w' \in W$ , on a

$$\Omega(v, v') = \Omega(w, w') + a\Omega(u, w') + a'\Omega(w, u) + aa'\Omega(u, u).$$

Et  $\Omega(w, w') = 0$  car  $W$  est lagrangien,  $\Omega(u, w') = \Omega(w, u) = 0$  car  $u \in W^{\perp\Omega}$  et  $\Omega(u, u) = 0$  car  $\Omega$  est alternée. Par conséquent  $W'$  est bien isotrope. Puis on itère ce procédé jusqu'à obtenir un espace isotrope de dimension  $n$  qui est donc lagrangien.

On passe maintenant à la preuve du second point. On se place dans une base symplectique pour se ramener au cas de  $\mathbb{R}^{2n}$  muni de la forme symplectique standard. Alors  $W' = JW$  est encore un sous-espace vectoriel lagrangien. En effet, soient  $u', v' \in W'$ . Alors il existe  $u, v \in W$  tels que  $u' = Ju$  et  $v' = Jv$ . On a donc

$$\Omega(u', v') = \Omega(Ju, Jv) = \Omega(u, v) = 0$$

car  $W$  est lagrangien. Donc  $W'$  est lagrangien. En outre l'application  $W' \rightarrow W^*$  définie par  $v \mapsto \Omega(\cdot, v)$  est un isomorphisme. En effet, soit  $u' \in W'$  non nul, on écrit  $u' = Ju$ . Alors  $\Omega(u, Ju) = \langle u, u \rangle > 0$ . Ainsi  $u' \mapsto \Omega(\cdot, u')$  est non nulle sur  $W$ . Donc l'application est injective. Comme les dimensions sont les mêmes (et sont finies), on a bien un isomorphisme. On considère  $(f_1, \dots, f_n)$  la base de  $W'$  envoyée sur la base dual  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  par l'isomorphisme précédent. Montrons que  $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$  est une base symplectique : pour tous  $i, j$

- $\Omega(e_i, e_j) = 0$  car  $W$  est lagrangien ;
- $\Omega(f_i, f_j) = 0$  car  $W'$  est lagrangien ;
- $\Omega(e_i, f_j) = e_j^*(e_i) = \delta_{i,j}$  par définition de  $f_j$ .

□

**Exemple 13.** On se place dans  $\mathbb{R}^{2n}$  muni de la forme symplectique standard. On identifie  $\mathbb{R}^{2n}$  et  $\mathbb{C}^n$ . Alors tout  $\mathbb{C}$  sous-espace vectoriel  $W$  est un sous-espace symplectique. En effet, soit  $u \in W$  non nul. Alors  $Ju$  est encore un élément de  $W$ . Ainsi  $\Omega(u, Ju) = \langle u, u \rangle > 0$ . Donc  $\Omega(u, \cdot)$  est non nulle sur  $W$ . Donc  $u \in W \mapsto \Omega(u, \cdot) \in W^*$  est injective et est donc un isomorphisme. Donc  $\Omega|_W$  est non dégénérée et  $(W, \Omega)$  est symplectique.

## 2 Variétés symplectiques, définition et premières propriétés

### 2.1 Définition

**Définition 14.** Une *variété symplectique* est un couple  $(M, \omega)$  où  $M$  est une variété de dimension  $2n$  et  $\omega$  est une 2-forme sur  $M$  qui est fermée (c'est-à-dire  $d\omega = 0$ ) et non dégénérée (c'est-à-dire  $\omega^n$  est une forme volume, voir section précédente).

**Exemple 15.**

1. La structure symplectique standard sur  $\mathbb{R}^{2n}$  est  $\omega_0 = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$ , on verra avec le théorème de Darboux que toutes les variétés symplectiques sont localement de ce type.
2. Une surface munie d'une forme d'aire est une variété symplectique.
3. Soit  $M$  une sous variété complexe de  $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ , alors  $(M, \omega_0)$  est symplectique. Cet exemple découle directement de l'exemple 13. Une telle variété est un exemple de variété kählérienne : une variété possédant des structures riemannienne, symplectique et complexe compatibles.

### 2.2 Structure symplectique sur le fibré cotangent

On commence par le cas de  $\mathbb{R}^n$ . On a alors  $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$ . On considère des coordonnées  $(q, p)$  sur  $\mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^n)^*$ . On pose alors

$$\lambda = \sum_{i=1}^n p_i dq_i$$

et

$$\omega = d\lambda = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i.$$

On retrouve la structure standard sur  $\mathbb{R}^{2n}$ .

**Naturalité.** Soit  $\phi : U \rightarrow V$  un difféomorphisme entre deux ouverts de  $\mathbb{R}^n$ . Alors  $\phi$  induit un difféomorphisme

$$\begin{aligned} \Phi : U \times (\mathbb{R}^n)^* &\rightarrow V \times (\mathbb{R}^n)^* \\ (q, p) &\mapsto (\phi(q), {}^t(d_q\phi)^{-1}p) \end{aligned}$$

**Propriété 16.** On a  $\Phi^*\lambda = \lambda$ .

*Démonstration.* On commence par remarquer que

$$\lambda_{(q,p)} \begin{pmatrix} v_q \\ v_p \end{pmatrix} = {}^t p \cdot v_q.$$

Par ailleurs,

$$d_{(q,p)}\Phi = \begin{pmatrix} d_q\phi & 0 \\ * & * \end{pmatrix}.$$

On en déduit

$$\Phi^*\lambda_{(q,p)} \begin{pmatrix} v_q \\ v_p \end{pmatrix} = \lambda_{\Phi(q,p)} \left( d_{(q,p)}\Phi \begin{pmatrix} v_q \\ v_p \end{pmatrix} \right) = \lambda_{\Phi(q,p)} \begin{pmatrix} d_q\phi(v_q) \\ * \end{pmatrix} = {}^t ({}^t(d_q\phi)^{-1}p) \cdot d_q\phi(v_q).$$

Ainsi

$$\Phi^*\lambda_{(q,p)} \begin{pmatrix} v_q \\ v_p \end{pmatrix} = {}^t p \cdot v_q = \lambda_{(q,p)} \begin{pmatrix} v_q \\ v_p \end{pmatrix}.$$

On obtient bien le résultat voulu. □

**Corollaire 17.** Soit  $M$  une variété de dimension  $n$ . Il existe une 1-forme  $\lambda$  sur  $T^*M$  telle que  $\lambda = \sum_{i=1}^n p_i dq_i$  dans les cartes. Une telle forme est appelée forme de Liouville. La 2-forme  $d\lambda$  est une forme symplectique sur  $T^*M$ .

## 2.3 Symplectomorphismes

**Définition 18.** Un difféomorphisme  $\phi : (M, \omega) \rightarrow (M', \omega')$  entre deux variété symplectiques est un *symplectomorphisme* si  $\phi^*\omega' = \omega$ .

**Remarque 19.** On verra plus loin une classe fondamentale de symplectomorphismes : les difféomorphismes hamiltoniens.

**Propriété 20.** Soit  $\phi : (M, \omega) \rightarrow (M, \omega)$  un symplectomorphisme. Alors  $\phi$  préserve le volume  $\omega^n$ .

On peut se demander à quel point être un symplectomorphisme est plus restrictif qu'être une application qui préserve le volume. Le théorème de non-tassement montre qu'être un symplectomorphisme est beaucoup plus restrictif qu'être une application qui préserve le volume.

**Théorème 21.** (Théorème de non tassement - Gromov 1985) Dans  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$ , on note

$$B(r) = \left\{ z \in \mathbb{R}^{2n}, \sum_{i=1}^n x_i^2 + y_i^2 < r^2 \right\}$$

la boule de rayon  $r$  et

$$Z(R) = \{ z \in \mathbb{R}^{2n}, x_1^2 + y_1^2 < R^2 \}$$

le cylindre de rayon  $R$ . Si  $\phi : B(r) \rightarrow Z(R)$  est un plongement symplectique (c'est-à-dire que  $\phi$  est un plongement et  $\phi^*\omega_0 = \omega_0$ ) alors  $r \leq R$ .

On ne peut donc pas envoyer une grand boule dans un petit cylindre par un symplectomorphisme alors que cela est possible par une application préservant le volume (dès que  $2n > 2$ ) car le cylindre est de volume infini.

## 2.4 Théorème de Darboux

Le théorème de Darboux montre que toutes les structures symplectiques sont localement les mêmes.

**Théorème 22.** *Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique de dimension  $2n$ . Alors, pour tout  $p \in M$ , il existe un voisinage  $V$  de  $p$  dans  $M$ , un voisinage  $U$  de  $0$  dans  $\mathbb{R}^{2n}$  et un symplectomorphisme  $\phi : (U, \omega_0) \rightarrow (V, \omega)$ .*

Ce théorème peut être démontré à l'aide de la méthode de Moser.

**Remarque 23.** Il existe un équivalent du théorème de Gray (voir cours contact) pour les déformations  $(\omega_t)$  telles que  $[\omega_t] = [\omega_0]$  pour tout  $t$ .

## 2.5 Sous-variétés lagrangiennes

**Définition 24.** Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique de dimension  $2n$ . Une sous-variété lagrangienne  $L$  est une sous-variété de  $M$  de dimension  $n$  telle que  $\omega|_L = 0$ .

La notation  $\omega|_L = 0$  signifie que, pour tout  $p \in L$ , pour tous  $u, v \in T_p L$ , on a  $\omega(u, v) = 0$ .

**Exemple 25.**

1. La section nulle dans  $T^*M$  est une sous-variété lagrangienne (compacte si  $M$  est compacte). En effet, dans les coordonnées  $(q, p)$  on a  $\lambda = pdq$  et la section nulle correspond à  $\{p = 0\}$ .
2. Une fibre dans  $T^*M$  est une sous-variété lagrangienne.
3. Toute courbe sur  $(S, \omega)$  est une sous-variété lagrangienne où  $S$  est une surface et  $\omega$  est une forme d'aire sur  $S$ .

Les sous-variétés lagrangiennes sont des objets fondamentaux en géométrie symplectique. De nombreux problèmes se reformulent ou se généralisent à l'aide de sous-variétés lagrangiennes. Voici un exemple d'une reformulation à l'aide des lagrangiennes.

**Proposition 26.** *Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique et  $\phi : M \rightarrow M$  un difféomorphisme. Alors  $\phi$  est un symplectomorphisme si et seulement si son graphe est une sous-variété lagrangienne de  $(M \times M, (-\omega) \times \omega)$ .*

*Démonstration.* Soit  $f : M \rightarrow M \times M$  définie par  $f(p) = (p, \phi(p))$ . On note  $p_1 : M \times M \rightarrow M$  la projection sur le premier facteur et  $p_2 : M \times M \rightarrow M$  la projection sur le second facteur. La forme symplectique  $\omega'$  sur  $M \times M$  s'écrit plus formellement  $\omega' = -p_1^* \omega + p_2^* \omega$ .

Déterminons  $f^* \omega'$ . On a

$$f^* \omega' = f^* (-p_1^* \omega + p_2^* \omega) = -(p_1 \circ f)^* \omega + (p_2 \circ f)^* \omega = -\omega + \phi^* \omega$$

car  $p_1 \circ f = \text{Id}$  et  $p_2 \circ f = \phi$ . On obtient donc que le graphe de  $\phi$  est lagrangien (c'est-à-dire que  $f^* \omega' = 0$ ) si et seulement si  $\phi$  préserve la forme symplectique.  $\square$

La structure symplectique est standard au voisinage d'une sous variété lagrangienne et le modèle standard d'une sous-variété lagrangienne est la section nulle dans le cotangent. Plus précisément, on a le théorème suivant.

**Théorème 27.** *Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique et  $L$  une sous-variété lagrangienne compacte. Alors, il existe un voisinage  $V$  de  $L$  dans  $M$ , un voisinage  $U$  de la section nulle dans  $(T^*L, \omega_0)$  (où  $\omega_0$  est la structure symplectique standard définie plus haut) et un symplectomorphisme  $(U, \omega_0) \rightarrow (V, \omega)$  qui est l'identité en restriction à  $L$ .*

Ce théorème se prouve encore à l'aide de la méthode de Moser.

**Exemple 28.** On se place dans  $T^*M$  muni de sa structure symplectique standard. On considère  $\sigma : M \rightarrow T^*M$  tel que  $\sigma_x \in T_x^*M$  pour tout  $x \in M$ . Autrement dit,  $\sigma$  est une 1-forme sur  $M$ . On note  $L = \sigma(M)$ . Alors  $L$  est lagrangienne si et seulement si  $\sigma$  est fermée. Démontrons ce résultat. On se place dans une carte. On a alors  $\lambda = \sum_{i=1}^n p_i dq_i$  et  $\omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i$ . On écrit  $\sigma_q = (q_1, \dots, q_n, \sigma_1(q), \dots, \sigma_n(q))$  (autrement dit  $\sigma = \sum_{i=1}^n \sigma_i dq_i$ ). On a alors

$$\sigma^* \lambda = \sum_{i=1}^n \sigma_i dq_i = \sigma.$$

Par conséquent

$$\sigma^* \omega = d\sigma$$

et  $L$  est lagrangienne (c'est-à-dire  $\sigma^* \omega = 0$ ) si et seulement si  $\sigma$  est fermée (c'est-à-dire  $d\sigma = 0$ ).

## 3 Dynamique hamiltonienne

### 3.1 Cas autonome

**Définition 29.** Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique. Soit  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction (lisse comme d'habitude). Le *champ hamiltonien*  $X_H$  associé à  $H$  est le champ de vecteurs sur  $M$  caractérisé par

$$\iota_{X_H} \omega = -dH.$$

On note  $\phi_H^t$  le flot de  $X_H$ . Le difféomorphisme  $\phi_H^1$  (s'il existe) est appelé *difféomorphisme hamiltonien*.

**Propriété 30.**

1. Le difféomorphisme  $\phi_H^t$  est un symplectomorphisme pour tout  $t$  pour lequel il est bien défini.
2. Le flot de  $\phi_H^t$  préserve  $H$ .
3. Pour tout  $t$  pour lequel  $\phi_H^t$  est bien défini, il existe  $K : M \rightarrow \mathbb{R}$  tel que  $\phi_H^t = \phi_K^1$ .

Le dernier point montre que le difféomorphisme  $\phi_H^t$  est un difféomorphisme hamiltonien pour tout  $t$  pour lequel il est bien défini.

*Démonstration.*

1. On a

$$\frac{d}{dt} (\phi_H^t)^* \omega = (\phi_H^t)^* (\iota_{X_H} d\omega + d\iota_{X_H} \omega) = 0.$$

Par conséquent  $t \mapsto (\phi_H^t)^* \omega$  est constante. Comme on a  $(\phi_H^0)^* \omega = \omega$ , on en déduit que  $\phi_H^t$  est un symplectomorphisme pour tout  $t$  pour lequel il est bien défini.

2. Soit  $p \in M$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} H(\phi_H^t(p)) &= d_{\phi_H^t(p)} H \left( \frac{d}{dt} \phi_H^t(p) \right) = d_{\phi_H^t(p)} H (X_H(\phi_H^t(p))) \\ &= -\omega_{\phi_H^t(p)} (X_H(\phi_H^t(p)), X_H(\phi_H^t(p))) = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent  $H$  est constante le long des orbites de  $X_H$ .

3. Soit  $s \neq 0$ . On pose  $K = sH$ . On a  $dK = sdH$  et donc  $X_K = sX_H$ . On en déduit que  $\phi_K^t = \phi_H^{st}$ . On obtient donc bien le résultat annoncé. □

**Exemple 31.** On se place dans  $(\mathbb{R}^2, dx \wedge dy)$ . Pour  $H : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , on a

$$X_H = \begin{pmatrix} -\frac{\partial H}{\partial y} \\ \frac{\partial H}{\partial x} \end{pmatrix}$$

1. On prend  $H_1(x, y) = x$ . On a alors

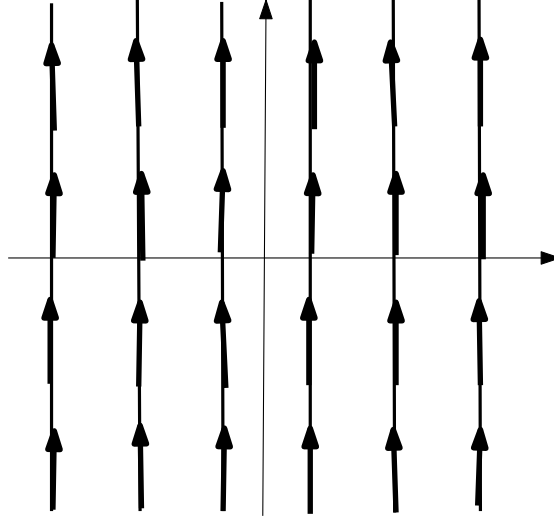


FIGURE 1 – Niveaux de  $H_1$  et champ hamiltonien

$$X_{H_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Le système différentiel associé est

$$\begin{aligned} x'(t) &= 0 \\ y'(t) &= 1 \end{aligned}$$

La solution de condition initiale  $(x_0, y_0)$  est donné, pour  $t \in \mathbb{R}$ , par

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \\ y(t) &= t + y_0 \end{aligned}$$

Les trajectoires sont les droites verticales. Elles correspondent bien aux niveaux de  $H_1$ .

2. On prend  $H_2(x, y) = x^2 + y^2$ . On a alors

$$X_{H_2} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$$

Le système différentiel associé est

$$\begin{aligned} x'(t) &= -y(t) \\ y'(t) &= x(t) \end{aligned}$$

Les trajectoires sont les cercles centrés en 0. Elles correspondent aux niveaux de  $H_2$ .

**Exemple 32.** On se place dans  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega = \sum_{i=1}^n dp_i \wedge dq_i)$ . Soit  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ . Le champ hamiltonien associé est

$$X_H = \sum_{i=1}^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q_i} - \frac{\partial H}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_i}.$$



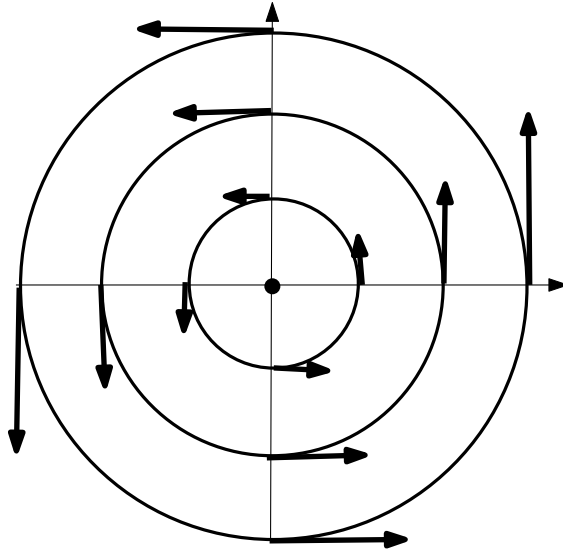


FIGURE 2 – Niveaux de  $H_2$  et champ hamiltonien

On obtient alors le système différentiel

$$\begin{aligned} q'_i(t) &= \frac{\partial H}{\partial p_i}(q(t), p(t)) \\ p'_i(t) &= -\frac{\partial H}{\partial q_i}(q(t), p(t)) \end{aligned}$$

On retrouve la formulation hamiltonienne de la mécanique classique ! Un exemple typique de hamiltonien issu de la physique est

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 - V(q)$$

où le premier terme est l'énergie cinétique et  $V$  est un potentiel. On obtient alors pour système différentiel

$$\begin{aligned} q'(t) &= p(t) \\ p'(t) &= -V'(q(t)). \end{aligned}$$

On retrouve bien l'équation de Newton  $q''(t) = -V'(q)$ .

**Niveaux d'un hamiltonien et géométrie de contact.** Soit  $(W, \omega)$  une variété symplectique. Soit  $H : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Soit  $c$  une valeur régulière pour  $H$ . On considère la sous-variété  $M = H^{-1}(c)$ . On suppose qu'il existe un champ de Liouville défini au voisinage de  $M$  et transverse à  $M$ . Alors (voir cours de géométrie de contact),  $(M, \alpha = \iota_Y \omega)$  est une variété de contact.

**Propriété 33.** Les champs de vecteurs  $R_\alpha$  et  $X_H$  sur  $M$  sont colinéaires.

*Démonstration.* On a  $d\alpha = d(\iota_Y \omega) = L_Y \omega = \omega$ . Par conséquent

$$d\alpha(X_H, \cdot) = \omega(X_H, \cdot)|_{TM} = -dH|_{TM} = 0$$

car  $M$  est un niveau de  $H$ . Ainsi  $X_H$  est dans le noyau de  $d\alpha$ . Par définition du champ de Reeb,  $R_\alpha$  et  $X_H$  sont colinéaires.  $\square$

Les champs de Reeb peuvent être vus comme une généralisation des champs hamiltoniens. En particulier, la conjecture de Weinstein provient de questions sur l'existence d'orbites périodiques du champ hamiltonien dans des hypersurfaces de niveau.

### 3.2 Cas non autonome

Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique. On considère maintenant des hamiltoniens dépendant du temps  $H : [0, 1] \times M \rightarrow \mathbb{R}$ . On note  $H_t = H(t, \cdot)$ . Comme dans le cas autonome, on caractérise le champ hamiltonien  $X_H^t$  par

$$\iota_{X_H^t} \omega = -dH_t.$$

Le champ hamiltonien est maintenant un champ de vecteurs dépendant du temps ! On note  $\phi_H^t$  le flot de  $(X_H^t)$  (attention c'est le flot d'un champ de vecteurs dépendant du temps, la définition est une généralisation de la définition usuelle). On dit que  $\phi_H^1$  est un *difféomorphisme hamiltonien*.

**Exemple 34.** On se place dans  $(\mathbb{R}^2, dx \wedge dy)$ . On considère  $H : (t, x, y) \mapsto -2tx + y$ . Le champ hamiltonien est alors

$$X_H^t = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \end{pmatrix}.$$

Le système différentiel associé est

$$\begin{aligned} x'(t) &= 1 \\ y'(t) &= 2t. \end{aligned}$$

La solution de condition initiale  $(x_0, y_0)$  est donné, pour  $t \in \mathbb{R}$ , par

$$\begin{aligned} x(t) &= t + x_0 \\ y(t) &= t^2 + y_0. \end{aligned}$$

Les solutions sont des paraboles.

**Propriété 35.** Le difféomorphisme  $\phi_H^t$  est un symplectomorphisme pour tout  $t$  pour lequel il est bien défini.

*Démonstration.* Voir le cas autonome. □

On note  $\text{Ham}(M, \omega)$  l'ensemble des difféomorphismes hamiltoniens de  $(M, \omega)$ .

**Proposition 36.** Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique compacte. L'ensemble  $\text{Ham}(M, \omega)$  est un sous-groupe de  $\text{Symp}(M, \omega)$ .

*Démonstration.* On a  $\text{Id} \in \text{Ham}(M, \omega)$  (il suffit de prendre  $H = 0$ ).

Soient  $H$  et  $G$  deux hamiltoniens dépendant du temps. Montrons que  $\phi_H^1 \circ \phi_G^1$  est un difféomorphisme hamiltonien. Soit  $p \in M$ . Pour tout  $t \in [0, 1]$ , on a

$$\frac{d}{dt}(\phi_H^t \circ \phi_G^t(p)) = X_H(\phi_G^t(p)) + d_{\phi_G^t(p)} \phi_H^t(X_G^t(p)).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} \omega_{\phi_H^t \circ \phi_G^t(p)} \left( \frac{d}{dt}(\phi_H^t \circ \phi_G^t(p)), \cdot \right) &= -d_{\phi_H^t \circ \phi_G^t(p)} H_t \cdot + \omega_{\phi_H^t \circ \phi_G^t(p)} \left( d_{\phi_G^t(p)} \phi_H^t(X_G^t(p)), \cdot \right) \\ &= -d_{\phi_H^t \circ \phi_G^t(p)} H_t \cdot + \omega_{\phi_G^t(p)} \left( X_G^t(p), \left( d_{\phi_G^t(p)} \phi_H^t \right)^{-1} \cdot \right) \\ &= -d_{\phi_H^t \circ \phi_G^t(p)} H_t \cdot - d_{\phi_G^t(p)} G_t \left( \left( d_{\phi_G^t(p)} \phi_H^t \right)^{-1} \cdot \right) \\ &= -d_{\phi_H^t \circ \phi_G^t(p)} \left( H_t + G_t \circ (\phi_H^t)^{-1} \right) \cdot \end{aligned}$$

où la seconde ligne est justifiée par le fait que  $(\phi_H^t)^{-1}$  est un symplectomorphisme. Par conséquent,  $t \mapsto \phi_H^t \circ \phi_G^t$  est le flot du hamiltonien  $K_t = H_t + G_t \circ (\phi_H^t)^{-1}$ . (Notons que si  $G$  et  $H$  sont autonomes,  $K$  n'est pas forcément autonome.)

Pour finir, soit  $H$  un hamiltonien dépendant du temps. On a alors que  $\phi_H^{-1} = \phi_K^1$  où  $K_t = -H_{1-t}$ . En effet, on a alors  $X_K^t = X_H^{1-t}$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . De plus, si  $y : [0, 1] \rightarrow M$  vérifie l'équation différentielle  $y'(t) = X_H^t(y(t))$  pour tout  $t \in [0, 1]$  alors  $z : [0, 1] \rightarrow M$  définie par  $z(t) = z(1-t)$  vérifie l'équation différentielle  $z'(t) = X_K^t(z(t))$  pour tout  $t \in [0, 1]$ . On a alors  $(\phi_H^1)^{-1}(y(1)) = y(0)$  et  $\phi_K^1(y(1)) = \phi_K^1(z(0)) = z(1) = y(0)$ . On obtient donc le résultat annoncé.  $\square$

**Théoreme 37.** (*Banayaga*) Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique compacte. Le groupe  $(M, \omega)$  est simple (c'est-à-dire qu'il n'a pas de sous-groupes distingués non triviaux).

## 4 Conjecture d'Arnold

La conjecture d'Arnold est une motivation fondamentale en géométrie symplectique et a mené à l'introduction de l'homologie de Floer, un outil central aujourd'hui. Cette conjecture relie le nombre de points fixes d'un difféomorphisme hamiltonien à la topologie de la variété. Elle a été prouvée (sous diverses formes) dans de nombreux cas. Les premiers cas fondamentaux ont été étudiés par Conley et Zehnder (pour les tores  $T^{2n}$ ) et Floer.

**Conjecture 38.** (*Conjecture d'Arnold*) Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique compacte. Soit  $\phi$  un difféomorphisme hamiltonien. Alors

$$\#\text{Fix}(\phi) \geq \inf_{f: M \rightarrow \mathbb{R} \text{ lisse}} \#\text{crit}(f)$$

où  $\text{Fix}(\phi) = \{x \in M, \phi(x) = x\}$  et  $\text{crit}(f) = \{x \in M, d_x f = 0\}$ .

Génériquement, une fonction lisse  $M \rightarrow \mathbb{R}$  est de Morse. En utilisant les inégalités de Morse, on obtient.

**Conjecture 39.** (*Conjecture d'Arnold - forme faible*) Soit  $(M, \omega)$  une variété symplectique compacte. Soit  $\phi$  un difféomorphisme hamiltonien générique. Alors

$$\#\text{Fix}(\phi) \geq \text{rang}(H_*(M, \mathbb{Z})).$$

**Cas d'un hamiltonien autonome.** Lorsque  $\phi$  est le flot au temps 1 d'un hamiltonien autonome  $H$ , la conjecture d'Arnold est facile à montrer. En effet, soit  $p$  un point critique de  $H$ . Alors  $X_H(p) = 0$ . Par conséquent  $\phi_H^t(p) = p$  pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . En particulier  $\phi_H^1(p) = \phi(p) = p$ . Donc  $p \in \text{Fix}(\phi)$ . On obtient donc

$$\#\text{Fix}(\phi) \geq \#\text{crit}(H)$$

et la conjecture d'Arnold est démontrée!

## Références

- [1] A. Cannas da Silva. *Lectures on Symplectic Geometry*. Number n° 1764 in Lecture Notes in Mathematics. Springer, 2001.
- [2] D. McDuff and D. Salamon. *Introduction to Symplectic Topology*. Oxford mathematical monographs. Clarendon Press, 1998.