

Géométrie de contact

École CIMPA de géométrie et applications

Anne Vaugon

23 juin 2022

Ces notes de cours ont été rédigées pour l'école CIMPA *Géométrie et application*. Cette école a eu lieu à Brazzaville du 13 au 25 juin 2022. Il s'agit d'une présentation classique de notions de base en géométrie de contact. Ces notes s'inspirent de l'ouvrage cité en référence. Ces notes sont particulièrement susceptibles de contenir des typos et des imprécisions!

1 Rappels sur les formes différentielles

1.1 Algèbre extérieure

On note E un espace vectoriel de dimension n sur \mathbb{R} .

Pour tout $p \in \mathbb{N}$, on note $\otimes^p E^*$ l'espace des p formes multilinéaires sur E à valeurs dans \mathbb{R} . L'ensemble $\otimes^p E^*$ est un \mathbb{R} -espace vectoriel.

On va tout particulièrement s'intéresser au sous-espace vectoriel $\Lambda^p E^*$ de $\otimes^p E^*$ des p formes alternées.

On définit un produit \otimes sur les formes multilinéaires de la façon suivante : si $\alpha \in \otimes^p E^*$ et $\beta \in \otimes^q E^*$ alors $\alpha \otimes \beta \in \otimes^{p+q} E^*$ et

$$\alpha \otimes \beta(v_1, \dots, v_{p+q}) = \alpha(v_1, \dots, v_p)\beta(v_{p+1}, \dots, v_{p+q})$$

pour tous $v_1, \dots, v_{p+q} \in E$.

Même si α et β sont alternées, $\alpha \otimes \beta$ n'est en général pas alternée. Pour obtenir un produit sur les formes alternées, on antisymétrise le produit précédent pour obtenir le *produit extérieur*. Si $\alpha \in \Lambda^p E^*$ et $\beta \in \Lambda^q E^*$ alors $\alpha \wedge \beta \in \Lambda^{p+q} E^*$ et

$$\alpha \wedge \beta(v_1, \dots, v_{p+q}) = \frac{1}{p!} \frac{1}{q!} \sum_{\sigma \in S_{p+q}} \epsilon(\sigma) \alpha(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(p)}) \beta(v_{\sigma(p+1)}, \dots, v_{\sigma(p+q)})$$

pour tous $v_1, \dots, v_{p+q} \in E$ où S_{p+q} est l'ensemble des permutations à $p+q$ éléments et $\epsilon(\sigma)$ est la signature d'une permutation σ .

Propriété 1. Le produit extérieur est associatif et anti-commutatif : si $\alpha \in \Lambda^p E^*$ et $\beta \in \Lambda^q E^*$ alors

$$\beta \wedge \alpha = (-1)^{pq} \alpha \wedge \beta.$$

On considère (e_1, \dots, e_n) une base de E et (e_1^*, \dots, e_n^*) sa base duale.

Base de $\otimes^p E^*$.

Propriété 2. L'ensemble

$$\{e_{j_1}^* \otimes \dots \otimes e_{j_p}^*, 1 \leq j_1, \dots, j_p \leq n\}$$

est une base de $\otimes^p E^*$.

L'espace vectoriel $\otimes^p E^*$ est donc de dimension p^n .

Base de $\Lambda^p E^*$.

Propriété 3. L'ensemble

$$\{e_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{j_p}^*, 1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n\}$$

est une base de $\Lambda^p E^*$.

L'espace vectoriel $\Lambda^p E^*$ est donc de dimension $\binom{n}{p}$.

Fonctorialité. Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit $A : E \rightarrow F$ une application linéaire. L'application linéaire A induit une application linéaire $A^* : F^* \rightarrow E^*$ définie par $A^*(f) = f \circ A$. L'application A^* se généralise en une application linéaire $A^* : \bigotimes^p F^* \rightarrow \bigotimes^p E^*$ définie par

$$A^* \alpha(v_1, \dots, v_p) = \alpha(Av_1, \dots, Av_p).$$

L'application A^* préserve le caractère alterné et se restreint donc en une application $A^* : \Lambda^p F^* \rightarrow \Lambda^p E^*$.

Propriété 4. Pour tous $\alpha \in \Lambda^p E^*$, $\beta \in \Lambda^q E^*$, $A : E \rightarrow F$ linéaire et $B : F \rightarrow G$ linéaire, on a

- $A^* \alpha \wedge \beta = A^* \alpha \wedge A^* \beta$
- $(BA)^* \alpha = A^*(B^* \alpha)$.

Il existe des propriétés analogues pour \otimes .

Formes volume. On rappelle que E est de dimension n . L'espace vectoriel des n -formes alternées sur E est de dimension 1 : dans une base (e_1, \dots, e_n) , les n -formes alternées sont les multiples de $e_1^* \wedge \cdots \wedge e_n^*$. Une *forme volume sur E* est une n -forme alternée non nulle.

1.2 Formes différentielles sur un ouvert de E

Soit $U \subset E$ un ouvert.

Définition 5. Une p -forme alternée α sur U est une application lisse $\alpha : U \rightarrow \Lambda^p E^*$.

On note $\Omega^p(U)$ l'ensemble des p formes sur U . Une p forme α sur U s'écrit donc

$$\alpha = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_p \leq n} \alpha_{j_1, \dots, j_p} e_{j_1}^* \wedge \cdots \wedge e_{j_p}^*$$

où les $\alpha_{j_1, \dots, j_p} : U \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions lisses.

Notation 6. On note $\alpha_x(v_1, \dots, v_p)$ la p forme α en $x \in U$ évaluée sur les vecteurs v_1, \dots, v_p de E . En outre, si (x_1, \dots, x_n) sont des coordonnées sur \mathbb{R}^n , on note (dx_1, \dots, dx_n) la base duale associée.

Par exemple, si $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction lisse, alors $df \in \Omega^1(U)$ et

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Opérations élémentaires sur les formes différentielles. Pour tous $\alpha \in \Omega^p(U)$, $\beta \in \Omega^q(U)$, $\gamma \in \Omega^q(U)$ et $f : U \rightarrow \mathbb{R}$, on définit l'addition $\alpha + \beta$, la multiplication par une fonction $f\alpha$ et le produit extérieur $\alpha \wedge \gamma$ par

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)_x &= \alpha_x + \beta_x \\ (f\alpha)_x &= f(x)\alpha_x \\ (\alpha \wedge \gamma)_x &= \alpha_x \wedge \gamma_x \end{aligned}$$

pour tout $x \in U$.

Produit intérieur. Soit X un champ de vecteurs sur U . Soit $\alpha \in \Omega^p(U)$ pour $p \geq 1$. La forme $\iota_X \alpha \in \Omega^{p-1}(U)$ est définie par

$$(\iota_X \alpha)_x(v_1, \dots, v_{p-1}) = \alpha_x(X(x), v_1, \dots, v_{p-1})$$

pour tout $x \in U$ et tous $v_1, \dots, v_{p-1} \in E$.

Tiré en arrière. Soit $\phi : U \rightarrow V$ une application lisse où U est un ouvert de E et V est un ouvert de F avec E et F deux espaces vectoriels de dimension finie. Soit $\alpha \in \Omega^p(V)$. Alors le tiré en arrière de $\phi^* \alpha \in \Omega^p(U)$ de α par ϕ est défini par

$$(\phi^* \alpha)_x(v_1, \dots, v_p) = \alpha_{\phi(x)}(d_x f(v_1), \dots, d_x f(v_p)).$$

Propriété 7. Avec les notations précédentes,

- ϕ^* est linéaire
- $\phi^*(f\alpha) = (f \circ \phi)\phi^*\alpha$
- $\phi^*(\alpha \wedge \beta) = \phi^*\alpha \wedge \phi^*\beta$
- $(\psi \circ \phi)^*\alpha = \phi^* \circ \psi^*$ où $\phi : U \rightarrow V$ et $\psi : V \rightarrow W$ avec U, V et W des ouverts dans des espaces vectoriels de dimension finie.

Différentielle extérieure. Si

$$\alpha = \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} \alpha_{j_1, \dots, j_p} dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p}$$

est une p forme différentielle sur U . On définit sa différentielle extérieure $d\alpha \in \Omega^{p+1}(U)$ par

$$\begin{aligned} d\alpha &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} d\alpha_{j_1, \dots, j_p} \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p} \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < \dots < j_p \leq n} \sum_{1 \leq j \leq n} \frac{\partial \alpha_{j_1, \dots, j_p}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{j_1} \wedge \dots \wedge dx_{j_p}. \end{aligned}$$

Propriété 8. Avec les notations précédentes

- d est linéaire
- $d(f\alpha) = f d\alpha + df \wedge \alpha$
- $d\alpha \wedge \beta = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta$ où α est une p forme différentielle
- $d \circ d = 0$
- $d(\phi^* \alpha) = \phi^* d\alpha$ où $\phi : U \rightarrow V$ et $\alpha \in \Omega^p(V)$.

Dérivée de Lie. Soit X un champ de vecteurs sur U . On note ϕ_t le flot de X . On suppose ϕ_t défini pour tout $t \in]-\epsilon, \epsilon[$. Soit $\alpha \in \Omega^*(U)$. La dérivée de Lie $L_X \alpha \in \Omega^p(U)$ de α dans la direction X est donnée par

$$L_X \alpha = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \phi_t^* \alpha.$$

La dérivée de Lie décrit l'évolution infinitésimale de α sous l'action du flot de X .

Formule de Lie-Cartan. Avec les notations du paragraphe précédent

$$L_X \alpha = d\iota_X \alpha + \iota_X d\alpha.$$

Formule de Lie-Cartan généralisée. On considère α_t une famille lisse de p -formes différentielles sur U . Soit X_t un champ de vecteurs dépendant du temps sur U et ϕ_t son flot que l'on suppose défini jusqu'au temps t_0 . On a alors

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \phi_t^* \alpha = \phi_{t_0}^* ((\dot{\alpha}_{t_0}) + L_{X_{t_0}} \alpha_{t_0}) = \phi_{t_0}^* ((\dot{\alpha}_{t_0} + d\iota_{X_{t_0}} \alpha_{t_0} + \iota_{X_{t_0}} d\alpha_{t_0}))$$

où $\dot{\alpha}_{t_0} = \frac{d}{dt} \Big|_{t=t_0} \alpha_t \in \Omega^p(U)$.

Formes volume. Une *forme volume* sur U est une n -forme différentielle qui est partout non nulle. Dans des coordonnées (x_1, \dots, x_n) , une forme volume s'écrit donc $f dx_1 \wedge \dots \wedge dx_n$ avec $f : U \rightarrow \mathbb{R}^*$.

1.3 Formes différentielles sur une variété

Soit M une variété lisse. L'idée est de se ramener à la section précédente en se plaçant dans des cartes.

On définit le fibré des p formes différentielles de façon analogue au fibré cotangent : on regarde les p -formes sur l'espace tangent en chaque point. On note $\Lambda^p T^*M$ le fibré vectoriel ainsi obtenu.

Définition 9. Une p forme différentielle sur M est une section lisse de $\Lambda^p T^*M$, c'est à dire qu'en chaque point $x \in M$, on se donne une p forme de $\Lambda^p T_x M^*$ (de façon lisse en x).

On retrouve toutes les opérations définies dans la section précédente en travaillant dans des cartes.

On note $\Omega^p(M)$ l'ensemble des p formes différentielles sur M .

2 Géométrie de contact

Les variétés de contact sont considérées comme l'équivalent en dimension impaire des variétés symplectiques et, comme les variétés symplectiques, elles sont issues de la mécanique classique (on y reviendra). Toutes les structures considérées dans ce cours sont supposées lisses. Toutes les variétés sont supposées sans bord.

2.1 Définition et exemples

Définition 10. Soit M une variété de dimension $2n+1$. Une *structure de contact* ξ sur M est un champ d'hyperplans tel que, pour tout $p \in M$, il existe un voisinage U de p et $\alpha \in \Omega^1(U)$ vérifiant

- $\xi = \ker(\alpha)$ sur U
- $\alpha \wedge d\alpha^n$ est une forme volume sur U .

Une forme α vérifiant les conditions précédentes est appelée *forme sur contact* sur U .

Exemple 11.

1. $(\mathbb{R}^3, \xi = \ker(dz - ydx))$

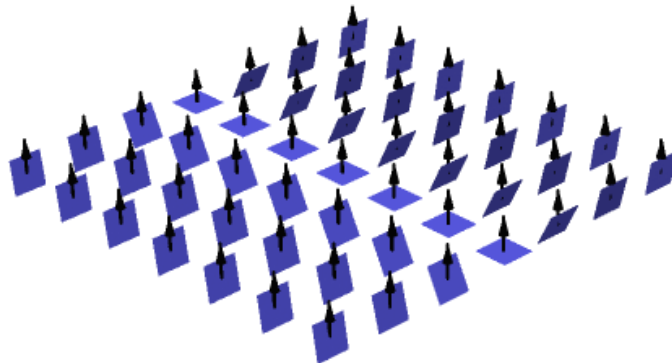


FIGURE 1 – Structure de contact sur \mathbb{R}^3 , les vecteurs décrivent le champ de Reeb (voir plus loin)

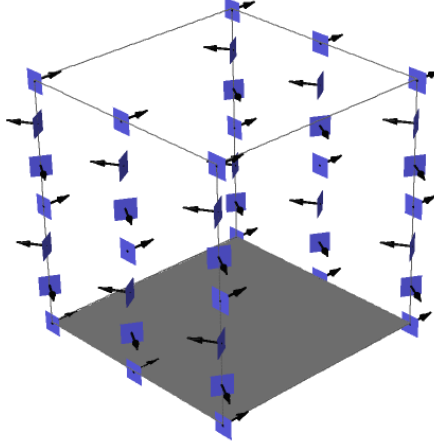


FIGURE 2 – Structure de contact sur le tore \mathbb{T}^3 , les vecteurs décrivent le champ de Reeb (voir plus loin)

2. $(\mathbb{T}^3, \xi = \ker(\sin(z)dx + \cos(z)dy))$
3. $(\mathbb{R}^{2n+1}, \xi = \ker(dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i))$ (spoiler : toutes les structures de contact sont localement de cette forme)
4. On considère $S^{2n-1} \subset \mathbb{R}^{2n}$. Alors la forme $\alpha = \sum_{j=1}^n x_j dy_j - y_j dx_j$ se restreint en une forme de contact sur S^{2n-1} .
5. (Pour les amateurs de géométrie riemannienne.) Soit S une surface munie d'une métrique g . On considère UTS le fibré unitaire tangent de S pour la métrique g . On note $\pi : UTS \rightarrow S$ la projection canonique. Alors la 1-forme définie sur UTS par

$$\alpha_{x,v}(X) = g_x(v, d_{(x,v)}\pi(X))$$

est une forme de contact. Cet exemple se généralise au fibré unitaire tangent d'une variété riemannienne de dimension quelconque.

Pour plus de dessins de structures de contact (et bien d'autres choses), rendez-vous sur la page web de Patrick Massot!

https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~pmassot/exposition/gallerie_contact/

Remarque 12. La condition $\alpha \wedge d\alpha^n$ est une forme volume ne dépend pas du choix de α tel que $\xi = \ker(\alpha)$. En effet, si $\xi = \ker(\alpha')$ avec α' une 1-forme sur U alors il existe $f : U \rightarrow \mathbb{R}^*$ tel que $\alpha' = f\alpha$. On a alors

$$d\alpha' = df \wedge \alpha + f d\alpha$$

et

$$\alpha' \wedge (d\alpha')^n = f\alpha \wedge (df \wedge \alpha + f d\alpha)^n = f^{n+1} \alpha \wedge (d\alpha)^n.$$

Ainsi $\alpha' \wedge (d\alpha')^n$ est une forme volume sur U si et seulement si $\alpha \wedge (d\alpha)^n$ est une forme volume sur U .

Remarque 13. Soit ξ un champ d'hyperplans sur M . On dit que ξ est *coorientable* s'il existe un champ de vecteurs sur M transverse à ξ en tout point (et bien sur lisse). On a alors le résultat suivant : il existe $\alpha \in \Omega^1(M)$ telle que $\xi = \ker(\alpha)$ si et seulement si ξ est coorientable. Sauf mention explicite du contraire, on supposera toujours cette condition vérifiée dans la suite : toute structure de contact sur M sera le noyau d'une forme de contact définie sur M .

Remarque 14. (Pour les amateurs de feuilletages.) La condition de contact est à mettre en parallèle avec le théorème de Frobenius : soit $\xi = \ker(\alpha)$ un champ d'hyperplans sur M , alors ξ est intégrable si et seulement si $\alpha \wedge d\alpha = 0$. Intuitivement, la condition de contact est donc la plus éloignée possible de la condition de feuilletage. Les structures de contact sont des champs d'hyperplans qui tournent !

Résultat généraux d'existence. En dimension 3, toute variété compacte, orientable porte une structure de contact (Martinet 1971). En dimension ≥ 5 , il y a des restrictions homotopiques mais, s'il n'y a pas de telles obstructions, alors il y a existence (Borman-Eliashberg-Murphy 2015).

2.2 Champ de Reeb

Définition 15. Soit α une forme de contact sur M . Le champ de Reeb R_α est le champ de vecteurs sur M caractérisé par

- $d\alpha(R, \cdot) = 0$
- $\alpha(R_\alpha) = 1$.

Exemple 16. On reprend les exemples de l'exemple 11

1. $R_\alpha = \frac{\partial}{\partial z}$
2. $R_\alpha = \sin(z) \frac{\partial}{\partial x} + \cos(z) \frac{\partial}{\partial y}$
3. $R_\alpha = \frac{\partial}{\partial z}$
4. voir TD
5. le champ de Reeb est le champ géodésique.

Remarque 17. Les conditions précédente caractérisent bien un unique champ de vecteurs. En effet, pour tout $p \in M$, $d\alpha$ est une 2-forme alternée sur $T_p M$. Comme $d\alpha_p$ est non dégénérée en restriction à ξ_p (c'est la condition de contact), son noyau est de dimension 1 et n'est pas dans ξ_p .

Remarque 18. Attention. Un champ de Reeb est associé à une forme de contact. Si on change la forme de contact, le champ de Reeb change !

Conjecture 19 (Conjecture de Weinstein). *Soit α une forme de contact sur M variété compacte. Alors R_α a toujours (au moins) une orbite périodique.*

Cette conjecture a été démontrée en dimension 3 par Taubes. Elle est encore largement ouverte en dimension supérieure.

2.3 Contactomorphismes, théorèmes de Gray et de Darboux

Définition 20. Soient (M_0, ξ_0) et (M_1, ξ_1) deux variétés de contact. Un difféomorphisme $\phi : M_0 \rightarrow M_1$ est un *contactomorphisme* si pour tout $p \in M_0$, on a

$$d_p \phi(\xi_0(p)) = \xi_1(\phi(p)).$$

Attention : si $\xi_0 = \ker(\alpha_0)$, $\xi_1 = \ker(\alpha_1)$ et ϕ est un contactomorphisme, on n'a pas forcément $\phi^* \alpha_1 = \alpha_0$. Par contre, il existe $f : M_0 \rightarrow \mathbb{R}^*$ telle que $\phi^* \alpha_1 = f \alpha_0$.

Exemple 21. Soit $(M, \xi = \ker(\alpha))$ avec M compacte. Soit R_α le champ de Reeb associé à α . On note ϕ_t le flot de R_α . Alors ϕ_t est un contactomorphisme pour tout $t \in \mathbb{R}$. En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a par la formule de Cartan

$$\frac{d}{dt}(\phi_t^* \alpha) = \phi_t^* (\iota_{R_\alpha} d\alpha + d\iota_{R_\alpha} \alpha).$$

Par définition du champ de Reeb, on obtient

$$\frac{d}{dt}(\phi_t^* \alpha) = 0.$$

Par conséquent, $t \mapsto \phi_t^* \alpha$ est constant. Comme $\phi_0 = \text{Id}$. On obtient $\phi_t^* \alpha = \alpha$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Par conséquent, ϕ_t est un contactomorphisme pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Le théorème de Gray montre qu'il n'y a pas de déformation non triviale d'une structure contact sur une variété compacte.

Théorème 22. *Soit M une variété compacte. Soit $(\xi_t)_{t \in [0,1]}$ une famille lisse de structures de contact sur M . Alors il existe $(\phi_t)_{t \in [0,1]}$ une famille lisse de difféomorphismes telle que pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $p \in M$,*

$$d_p \phi_t(\xi_0(p)) = \xi_t(\phi_t(p)).$$

La preuve de ce théorème est un exemple typique d'application de la méthode de Moser, une technique de preuve fondamentale en géométrie symplectique et de contact.

Démonstration. On cherche (ϕ_t) comme flot du champ dépendant du temps (X_t) . On choisit (α_t) une famille lisse de formes de contact telle que $\xi_t = \ker(\alpha_t)$ pour tout $t \in [0,1]$.

Première étape : recherche de conditions sur (X_t) . La condition

$$d_p \phi_t(\xi_0(p)) = \xi_t(\phi_t(p))$$

pour tout $t \in [0,1]$ et pour tout $p \in M$ se réécrit en : il existe une famille (λ_t) de fonctions de M dans \mathbb{R}^* telle que

$$\phi_t^* \alpha_t = \lambda_t \alpha_0$$

pour tout $t \in [0,1]$. Dérivons cette condition par rapport à t en utilisant la formule de Lie Cartan généralisée

$$\frac{d}{dt}(\phi_t^* \alpha_t) = \phi_t^* (\dot{\alpha}_t + \iota_{X_t} d\alpha_t + d\iota_{X_t} \alpha_t) = \dot{\lambda}_t \alpha_0.$$

On remplace α_0 par $\frac{1}{\lambda_t} \phi_t^* \alpha_t$ et on obtient

$$\phi_t^* (\dot{\alpha}_t + \iota_{X_t} d\alpha_t + d\iota_{X_t} \alpha_t) = \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} \phi_t^* \alpha_t = \phi_t^* (\mu_t \alpha_t)$$

avec $\mu_t = \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} \circ \phi_t^{-1}$. La condition devient donc

$$\dot{\alpha}_t + \iota_{X_t} d\alpha_t + d\iota_{X_t} \alpha_t = \mu_t \alpha_t.$$

Supposons $X_t \in \xi_t$ pour tout $t \in [0,1]$. La condition devient

$$\dot{\alpha}_t + \iota_{X_t} d\alpha_t = \mu_t \alpha_t.$$

En évaluant sur R_{α_t} , il vient

$$\mu_t = \dot{\alpha}_t(R_{\alpha_t}).$$

En restriction à ξ_t au temps t , on obtient

$$\iota_{X_t} d\alpha_t|_{\xi_t} = -\dot{\alpha}_t|_{\xi_t}.$$

On a maintenant des conditions assez explicites sur (X_t) pour passer à la seconde étape.

Seconde étape : fin de la preuve. Pour tout $t \in [0,1]$, comme $d\alpha_t|_{\xi_t}$ est non dégénérée, il existe un unique $X_t \in \xi_t$ tel que

$$\iota_{X_t} d\alpha_t|_{\xi_t} = -\dot{\alpha}_t|_{\xi_t}.$$

On note ϕ_t le flot de (X_t) . On pose, pour tout $t \in [0, 1]$

$$\mu_t = \dot{\alpha}_t(R_{\alpha_t}).$$

On choisit (λ_t) tel que

$$\frac{d}{dt} \ln(\lambda_t) = \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t} = \mu_t \circ \phi_t$$

pour tout $t \in [0, 1]$ et λ_0 est la fonction constante 1. On va montrer que

$$\phi_t^* \alpha_t = \lambda_t \alpha_0$$

pour tout $t \in [0, 1]$. Pour cela, on calcule

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\lambda_t} \phi_t^* \alpha_t \right) = -\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t^2} \phi_t^* \alpha_t + \frac{1}{\lambda_t} \phi_t^* (\dot{\alpha}_t + \iota_{X_t} d\alpha_t + d\iota_{X_t} \alpha_t).$$

En reprenant les calculs de la première étape, on obtient

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\lambda_t} \phi_t^* \alpha_t \right) = -\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t^2} \phi_t^* \alpha_t + \frac{1}{\lambda_t} \phi_t^* (\dot{\alpha}_t + \iota_{X_t} d\alpha_t).$$

Comme $\iota_{X_t} d\alpha_t|_{\xi_t} = -\dot{\alpha}_t|_{\xi_t}$, on obtient que

$$\dot{\alpha}_t + \iota_{X_t} d\alpha_t = f_t \alpha_t$$

où $f_t : M \rightarrow \mathbb{R}$. En évaluant en R_{α_t} , on obtient $f_t = \mu_t$. On obtient donc,

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\lambda_t} \phi_t^* \alpha_t \right) = -\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t^2} \phi_t^* \alpha_t + \frac{1}{\lambda_t} \phi_t^* (\mu_t \alpha_t) = -\frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t^2} \phi_t^* \alpha_t + \frac{\dot{\lambda}_t}{\lambda_t^2} \phi_t^* (\alpha_t) = 0$$

par définition de λ_t . On a donc $t \mapsto \frac{1}{\lambda_t} \phi_t^* \alpha_t$ constant. En $t = 0$, on obtient α_0 . Par conséquent,

$$\phi_t^* \alpha_t = \lambda_t \alpha_0$$

pour tout $t \in [0, 1]$. Et le théorème est démontré! \square

Le théorème de Darboux montre que toutes les structures de contact sont localement identiques. Il n'y a donc pas d'invariants locaux en topologie de contact (comme la courbure en géométrie riemannienne par exemple).

Théorème 23. (*Théorème de Darboux*) Soit (M, ξ) une variété de contact de dimension $2n + 1$. Alors, pour tout $p \in M$, il existe un voisinage V de p , un voisinage U de 0 dans \mathbb{R}^{2n+1} et un contactomorphisme

$$\phi : \left(U, \ker \left(dz - \sum_{i=1}^n y_i dx_i \right) \right) \rightarrow (V, \xi).$$

La preuve de ce théorème est encore une application de la méthode de Moser.

2.4 Géométrie de contact et géométrie symplectique

Les variétés de contact apparaissent naturellement comme bord, ou hypersurface des variétés symplectiques. On considère (W, ω) une variété symplectique.

Définition 24. Un champ de vecteur sur W est dite *de Liouville* si $L_Y \omega = \omega$.

Exemple 25. Dans $(\mathbb{R}^{2n}, \omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i)$, le champ radial

$$Y = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial}{\partial x_i} + y_i \frac{\partial}{\partial y_i}$$

est un champ de Liouville.

Propriété 26. Soit Y est un champ de Liouville. Soit ϕ_t son flot. On suppose que ϕ_t est défini pour tout $t \in I$. Alors $\phi_t^* \omega = e^t \omega$ pour tout $t \in I$.

Démonstration. On a, pour tout $t \in I$,

$$\frac{d}{dt} (e^{-t} \phi_t^* \omega) = -e^{-t} \phi_t^* \omega + e^{-t} \phi_t^* L_Y \omega = -e^{-t} \phi_t^* \omega + e^{-t} \phi_t^* \omega = 0.$$

On obtient bien le résultat car $\phi_0^* \omega = \omega$ et $0 \in I$. \square

Proposition 27. Si $M \subset W$ est une hypersurface transverse à un champ de Liouville Y , alors $(M, \alpha = \iota_Y \omega)$ est une variété de contact.

Exemple 28. On reprend l'exemple 25. On considère la sphère unité dans \mathbb{R}^{2n} . Le champ Y est bien transverse à S^{2n-1} . On obtient donc une forme de contact α sur S^{2n-1} définie par

$$\alpha = \iota_Y \omega = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n x_j dy_j - y_j dx_j.$$

C'est, à une facteur $1/2$ près, la forme de contact donnée dans l'exemple 11.

Démonstration. Par la formule de Lie-Cartan et la définition du champ de Liouville

$$d(\iota_Y \omega) = L_Y \omega = \omega.$$

La $2n$ -forme ω^n est une forme volume sur W . Comme Y est transverse à M , on en déduit que $\iota_Y(\omega^n)$ est une forme volume sur M . Or la condition de contact est

$$\alpha \wedge d\alpha^n = (\iota_Y \omega) \wedge (\omega)^{n-1} = \frac{1}{n} \iota_Y(\omega^n).$$

et on obtient bien une forme volume sur M . La forme α est donc bien une forme de contact sur M . \square

Remarque 29. Il n'existe pas de champ de Liouville défini globalement sur une variété symplectique compacte sans bord. Mais, pour obtenir une forme de contact sur M , il suffit que le champ de Liouville soit défini au voisinage de M .

3 Nœuds legendriens

Soit (M, ξ) une variété de contact de dimension 3. On rappelle qu'un *nœud* de M est un plongement de S^1 dans M . Deux nœuds γ_0 et γ_1 sont dit *isotopes* s'il existe une famille lisse γ_t de plongements reliant γ_0 et γ_1 . Moralement, deux nœuds sont isotopes si on peut passer de l'un à l'autre sans créer des points singuliers ou des autointersections.

Définition 30. Un nœud $\gamma : S^1 \rightarrow M$ est dit *legendrien* si $\gamma'(t) \in \xi(\gamma(t))$ pour tout $t \in S^1$.

3.1 Nœuds legendriens dans \mathbb{R}^3 .

On se place dans $(\mathbb{R}^3, \ker(dz - ydx))$. On va voir qu'on peut décrire un nœud legendrien en le projetant sur un plan judicieux.

La *projection frontale* est la projection $p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $p(x, y, z) = (x, z)$. On note $\gamma_F = p \circ \gamma$ la projection frontale d'une courbe paramétrée γ .

Proposition 31. Soit $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ une immersion legendrienne. Alors γ_F n'a pas de tangente verticale. En outre, après perturbation arbitrairement petite, les singularités de γ_F sont des *cusps* (non verticaux).

Rappels sur les cusps. Les cusps sont des types de singularités. Un cusp modèle est donné par le paramétrage $t \mapsto (t^2, t^3)$ au voisinage de 0. Les autres cusps sont les singularités diffeomorphes à ce modèle. En particulier si $t \mapsto (x(t), z(t))$ a un cusp en $t = t_0$, alors $\frac{z'(t)}{x'(t)}$ admet une limite l en t_0 . Cette limite donne la pente du cusp. Par exemple, le cusp modèle a une pente nulle.

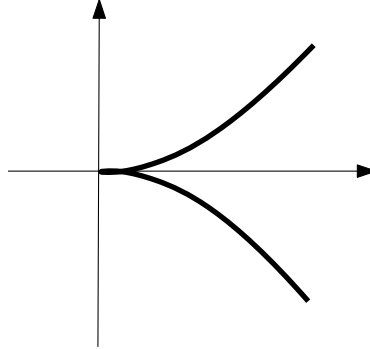


FIGURE 3 – Cusp modèle

Proposition 32. *Toute courbe paramétrée (lisse) γ_F dans \mathbb{R}^2 sans tangente verticale et ayant des cusps pour singularités se relève en une unique courbe legendrienne γ dans \mathbb{R}^3 .*

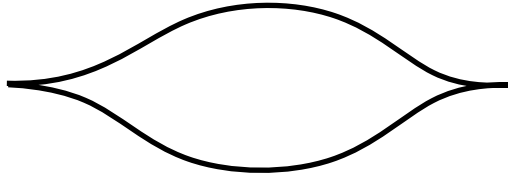


FIGURE 4 – Projection frontale d'un nœud trivial legendrien

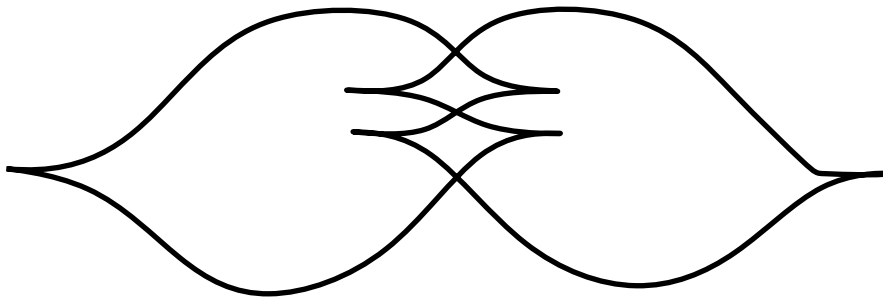


FIGURE 5 – Projection frontale d'un nœud de trèfle legendrien

Démonstration. (Démonstration de la première partie de la proposition 31). Soit $\gamma : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un nœud legendrien. On écrit $\gamma = (x, y, z)$. La condition d'être une courbe legendrienne s'écrit

$$z'(t) = y(t)x'(t)$$

pour tout $t \in S^1$. En particulier, si $x'(t_0) = 0$ alors $z'(t_0) = 0$. Il n'y a donc pas de tangente verticale mais des singularités si $x'(t_0) = 0$. \square

Démonstration. (Démonstration de la proposition 32). Soit $\gamma_F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée lisse sans tangente verticale et ayant des cusps pour singularités. On écrit $\gamma_F = (x, z)$. Pour obtenir un relevé γ il nous reste à déterminer la coordonnée y .

En dehors des cusps, x' ne s'annule pas et on pose $y = \frac{z'}{x'}$. Au niveau d'un cusp, en $t = t_0$, on a que $\frac{z'(t)}{x'(t)}$ admet une limite l et on pose $y(t_0) = l$. On obtient ainsi une fonction y lisse et $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ vérifie bien $z'(t) = y(t)x'(t)$ pour tout $t \in [a, b]$. On a donc bien un relevé legendrien. La condition $z'(t) = y(t)x'(t)$ nous assure qu'un tel relevé est unique. \square

Remarque 33. Sur la projection frontale, au niveau d'un point double, il n'est pas nécessaire de préciser quel brin passe au-dessus de l'autre (comme pour un noeud standard) car c'est toujours le brin de plus grande pente qui passe au-dessus.

3.2 Approximation par un nœud legendrien

Soit (M, ξ) une variété de contact. Soit d une distance sur M associée à la topologie de M donnée par sa structure de variété.

Théoreme 34. Soit γ un nœud dans M . Soit $\epsilon > 0$. Alors il existe un nœud legendrien γ_0 isotope à γ et tel que

$$d(\gamma_0, \gamma) < \epsilon.$$

Démonstration. (Schéma de preuve.) On commence par traiter le cas d'un arc $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. On considère γ_F la projection frontale de γ . On écrit $\gamma = (x, y, z)$. Pour obtenir un arc legendrien η approchant γ , on approche γ_F par une courbe $\eta_F = (x_\eta, z_\eta)$ sans tangente verticale, ayant des cusps pour singularités et telle que $\frac{z'_\eta}{x'_\eta}$ soit proche de y . Le relevé legendrien de η_F est alors proche de γ .

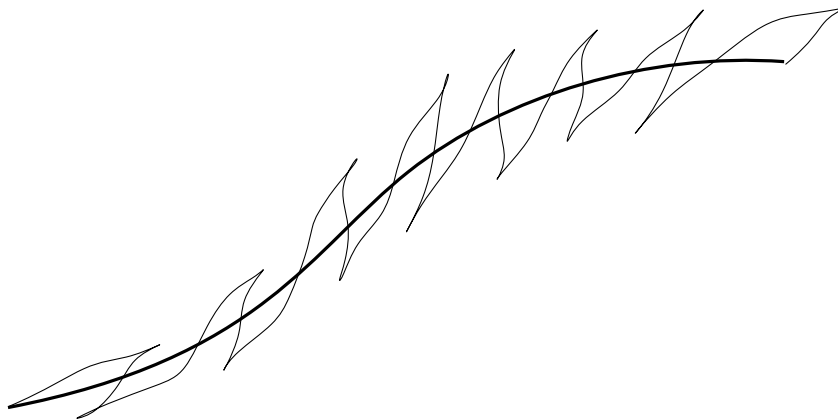


FIGURE 6 – Approximation de la projection frontale

Dans le cas général, on se ramène au cas précédent en se plaçant dans des cartes de Darboux (et donc en se ramenant à \mathbb{R}^3). \square

3.3 Comment garer une voiture avec de la géométrie de contact

On repère une voiture par la position $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ de son centre de gravité et par l'angle θ qui donne sa direction. Dans ces coordonnées, la voiture ne peut se déplacer que dans les directions dans

$$\text{Vect} \left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \cos(\theta) \frac{\partial}{\partial x} + \sin(\theta) \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

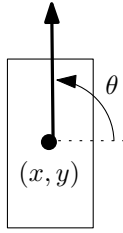


FIGURE 7 – Coordonnées associées à la voiture

Se déplacer dans la direction $\frac{\partial}{\partial \theta}$ revient à tourner les roues sans avancer. Se déplacer dans la direction $\cos(\theta)\frac{\partial}{\partial x} + \sin(\theta)\frac{\partial}{\partial y}$ revient à avancer sans tourner le volant. Une combinaison linéaire de ces vecteurs revient à avancer en tournant le volant. Une trajectoire de la voiture est donc une courbe legendrienne dans la variété de contact

$$(\mathbb{R}^2 \times S^1, \ker(\sin(\theta)dx - \cos(\theta)dy)).$$

On a un équivalent de la projection frontale des sections précédentes en projetant sur les coordonnées (x, y) . On retrouve bien les cusps, en observant les traces de roue sur la route.

Par ailleurs, imaginons qu'on veuille garer une voiture. La voiture est initialement placée à côté de la place. La trajectoire rêvée serait de déplacer la voiture perpendiculairement à sa direction. Cette trajectoire n'est pas legendrienne. Néanmoins, on peut l'approcher par une courbe legendrienne : c'est la stratégie adoptée pour faire un créneau !

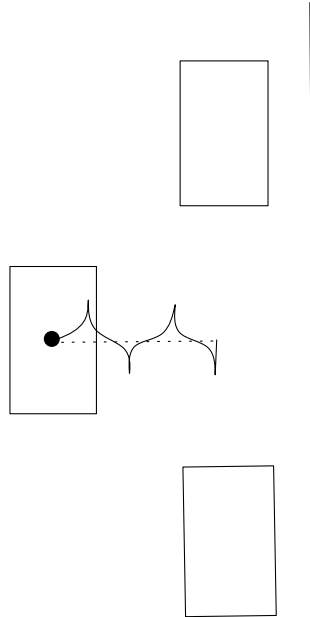


FIGURE 8 – Un créneau (pas du tout efficace)

Références

- [1] H. Geiges. *An Introduction to Contact Topology*. Cambridge University Press, 2008.