TP de géométrie symplectique
École CIMPA sur la géométrie et applications, Brazzaville

Le but de ce TP est de comparer expérimentalement deux schémas numériques permettant de calculer des solutions approchées de systèmes hamiltoniens.

Pour l'équation différentielle

$$y' = F(y)$$

où $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ et la condition initiale a, on définit le schéma d'Euler explicite de pas h par
- la condition initiale $y_0 = a$;
- la relation de récurrence $y_{n+1} = y_n + hF(y_n)$ (y_n est la valeur approchée de $y(nh)$ où y est la solution de condition initiale a en $t = 0$).

Le schéma d'Euler explicite est un schéma numérique général : il ne s'applique pas qu'au systèmes hamiltoniens.

Considérons maintenant le système hamiltonien associé à la fonction $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} q' &= \frac{\partial H}{\partial p}(q,p) \\ p' &= -\frac{\partial H}{\partial q}(q,p) \end{aligned}$$

Le schéma d'Euler symplectique associé à la condition initiale (a, b) et au pas h est défini par
- les conditions initiales $q_0 = a$ et $p_0 = b$;
- les relations de récurrence

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= q_n + h\frac{\partial H}{\partial p}(q_n, p_{n+1}) \\ p_{n+1} &= p_n - h\frac{\partial H}{\partial q}(q_n, p_{n+1}) \end{aligned}$$

Ce schéma est explicite en q et implicite en p. Il existe une version implicite en q et explicite en p avec des propriétés similaires.

On se place maintenant dans $\mathbb{R}^{2n}$ muni de la structure symplectique standard. On considère un schéma numérique associé aux systèmes hamiltoniens sur $\mathbb{R}^{2n}$ et défini par une récurrence $y_{n+1} = \phi_H(y_n)$ (où ϕ_H dépend du hamiltonien H choisi). On dit qu'un tel schéma est symplectique si ϕ_H est un symplectomorphisme pour tout H.

Les deux premiers exercices sont théoriques et sont à traiter après les exercices pratiques.

Exercice 1. Montrer que le schéma d'Euler symplectique est un schéma symplectique.

On considère le système hamiltonien associé au pendule

$$\begin{aligned} q' &= p \\ p' &= -\sin(q) \end{aligned}$$

Exercice 2. Déterminer la fonction hamiltonienne associée et rappeler le lien avec le système physique du pendule.

Il est recommandé d'importer les bibliothèques numpy et matplotlib. Par exemple à l'aide des commandes suivantes :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
```

Exercice 3. Si avez peu d'expérience avec python, testez les lignes de code suivantes

```
L = [1,2,5,4]
L.append(0)
print(L)
print(L[2])

res = 0
for i in range(1,4):
    res = res + i**2
print(res)
```

Que calcule-t-on avec res ?

Et enfin

```
def myf(n):
    res = 1
    for i in range(1,n+1):
        res = res*i
    return res
```

Que calcule la fonction myf ?

Exercice 4.

1. On se donne comme conditions initiales $q_0 = 1$ et $p_0 = 1$. On fixe $h = 0.1$ et $N = 150$. À l'aide d'une boucle, déterminer deux listes contenant respectivement les N premières valeurs approchées de q et de p données par le schéma d'Euler explicite (si vous avez utilisé les commandes suggérées plus haut, la fonction sinus s'appelle avec `np.sin`).
2. À l'aide de `plot` (à appeler avec `plt.plot` si vous avez utilisé les commandes suggérées plus haut), représenter la solution approchée obtenue dans la question précédente.

Exercice 5. Mêmes questions pour le schéma d'Euler symplectique.

Exercice 6. En utilisant `contour` (à appeler avec `plt.contour`) tracer des niveaux de la fonction hamiltonnienne associée au système.

Exercice 7. Ajouter à la figure de l'exercice précédent des solutions approchées calculées avec la méthode d'Euler explicite et avec la méthode d'Euler symplectique.

Exercice 8. On prend maintenant $h = 1$. Tracer sur la même figure des niveaux de la fonction d'énergie et l'image d'un carré par quelques itérations des deux schémas étudiés.

Référence. Geometric Numerical Integration par Hairer, Lubich et Wanner.