# Exercices de géométrie symplectique et de contact
# École CIMPA sur la géométrie et applications, Brazzaville

**Exercice 1.** Dans $\mathbb{R}^2$, on considère $\alpha = x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$. On définit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ et $\psi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ par

$$\phi(x, y) = (ax, by) \text{ et } \psi(x, y) = (y, -x)$$

où $a, b \in \mathbb{R}$.

1. Calculer $\mathrm{d}\alpha$.
2. Déterminer $\phi^*\alpha$ et $\psi^*\alpha$.

**Exercice 2.** Dans $\mathbb{R}^2$, on considère $\omega = \mathrm{d}x \wedge \mathrm{d}y$ et $X = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$.

1. Déterminer le flot $\phi_t$ de $X$.
2. Déterminer $\phi_t^*\omega$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
3. Calculer $L_X\omega$ en utilisant la définition puis en utilisant la formule de Lie Cartan.

**Exercice 3.** Soit $V$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n$ et $\Omega$ une forme symplectique sur $V$. Si $W$ est un sous-espace vectoriel de $V$ on pose

$$W^{\perp_\Omega} = \{v \in V, \Omega(v, w) = 0 \text{ pour tout } w \in W\}.$$

1. Montrer que $\dim(W) + \dim(W^{\perp_\Omega}) = 2n$.
2. Pour $\Omega = \sum_{i=1}^n e_i^* \wedge f_i^*$, déterminer $W^{\perp_\Omega}$ pour $W = \mathrm{Vect}(e_1)$, $W = \mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_n)$ et $W = \mathrm{Vect}(e_1, f_1)$.
3. Montrer que $(W^{\perp_\Omega})^{\perp_\Omega} = W$.

**Exercice 4.** Soit $V$ un espace vectoriel de dimension $m$. Soit $\Omega$ une forme bilinéaire alternée sur $V$. Montrer qu'il existe une base $(u_1, \dots, u_k, e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$ de $V$ telle que $\Omega = \sum_{i=1}^n e_i^* \wedge f_i^*$.

**Exercice 5.** Soit $V$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n$. Soit

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id} \\ \mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}),\ {}^tAJ_0A = J_0\}$.

1. Monter que $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ est un groupe stable par transposition.
2. Décrire $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$.
3. Monter que tout élément de $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ est de déterminant 1.
4. Montrer que les valeurs propres de $A \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ peuvent être regroupées en paires $\lambda, \frac{1}{\lambda} \in \mathbb{R}$, $\lambda, \lambda^{-1} \in S^1$ et en quadruplets $\lambda, \frac{1}{\lambda}, \overline{\lambda}, \frac{1}{\overline{\lambda}}$.

**Exercice 6.** Le but de cet exercice est de montrer le théorème de non tassement dans le cas linéaire : si $\psi : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^{2n}$ est une application affine symplectique telle que $\psi(B(r)) \subset Z(R)$ alors $r \leq R$ (où $B(r)$ est la boule euclidienne de rayon $r$ et $Z(R) = B(R) \times R^{2n-2}$ est un cylindre).

On va montrer le résultat pour $r = 1$. La norme considérée est la norme euclidienne. On note $(e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n)$ la base canonique (dans laquelle la forme symplectique est standard). On écrit $\psi = \psi_0 + z_0$ avec $\psi_0$ symplectique linéaire. On pose $u = {}^t\psi_0(e_1)$ et $v = {}^t\psi_0(f_1)$. On pose $a = e_1^*(z_0)$ et $b = f_1^*(z_0)$.

1. Montrer la condition $\psi(B(1)) \subset Z(R)$ peut se réécrire : pour tout $z \in B(1)$,
$$(\langle z, u\rangle + a)^2 + (\langle z, v\rangle + b)^2 \leq R^2.$$
2. Montrer que pour tous $u, v \in \mathbb{R}^2$, on a $\omega(u, v) \leq ||u|| \cdot ||v||$.
3. En déduire le théorème de non tassement dans le cas $r = 1$.

**Exercice 7.** Soient $(M_1, \omega_1)$ et $(M_2, \omega_2)$ deux variétés symplectiques. On note $p_1$ et $p_2$ les projections de $M_1 \times M_2$ sur $M_1$ et $M_2$.
1. Monter que $\omega = p_1^*\omega_1 - p_2^*\omega_2$ est une forme symplectique que $M_1 \times M_2$.
2. Soit $\phi : M_1 \longmapsto M_2$. Montrer que $\phi$ est un symplectomorphisme si et seulement si son graphe est lagrangien dans $(M_1 \times M_2, \omega)$.

**Exercice 8.** Déterminer les sections lagrangiennes du fibré cotangent muni de la structure symplectique standard.

**Exercice 9.** Écrire une preuve du théorème de Darboux pour une variété de contact.

**Exercice 10.** On considère $S^{2n-1} \subset \mathbb{C}^n$, on note $J$ la multiplication par $i$ induite sur les espaces tangents. Pour tout $p \in S^{2n-1}$, on pose $\xi_p = T_pS^{2n-1} \cap JT_pS^{2n-1}$.
1. Montrer que $\xi$ définit la structure de contact standard sur $T_pS^{2n-1}$.
2. Interpréter le champ de Reeb associé à la forme standard dans ce contexte.

**Exercice 11.** Soit $n$ un entier non nul. On considère le tore $T^3$ muni de coordonnées $(x, y, z)$. On définit
$$\alpha = \sin(nz)\mathrm{d}x + \cos(nz)\mathrm{d}y.$$
Montrer que $\alpha$ est une forme de contact sur $T^3$. Déterminer son champ de Reeb et les orbites périodiques associées.

**Exercice 12.** On considère $S^3 \subset \mathbb{R}^4$. Pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, on considère la 1-forme sur $S^3$
$$\alpha_a = x_1\mathrm{d}y_1 - y_1\mathrm{d}x_1 + a(x_2\mathrm{d}y_2 - y_2\mathrm{d}x_2).$$
1. Montrer que $\alpha_a$ est une forme de contact pour tout $a \neq 0$.
2. Les structures de contact $\xi_a$ associées sont-elles difféomorphes ?
3. Déterminer le champ de Reeb associé à $\alpha_a$ ainsi que ses orbites périodiques.

**Exercice 13.** Soit $(M, \xi = \ker(\alpha))$ une variété de contact de dimension 3. Un champ de vecteurs sur une variété de contact est dit *de contact* si son flot préserve la structure de contact.
1. Montrer qu'un champ de Reeb est un champ de contact.
2. Dans $(\mathbb{R}^3, \xi_{std})$, construire un champ de contact qui n'est pas un champ de Reeb.
3. Soit $X$ un champ de vecteurs sur $M$, montrer que les assertions suivantes sont équivalentes
   (a) $X$ est un champ de contact
   (b) $L_X\alpha_{|\xi} = 0$.
4. Montrer le théorème de Libermann : l'application $f : X \mapsto \alpha(X)$ est une bijection entre les champs de vecteurs de contact et les fonctions lisses de $M$ dans $\mathbb{R}$. Une telle fonction est appelée *hamiltonien de contact*.
5. Parmi les champs de contact, lesquels peuvent être des champs de Reeb ?

**Exercice 14.** Écrire $S^3 \subset \mathbb{C}^2$ comme reunion de deux tores pleins. Décrire l'application de recollement.