ENS Lyon **TD 9** **20/12/2012**
géométrie symplectique

Exercice 1 On munit $M \times \mathbb{R}^k$ des coordonnées (q, v). Soit $S : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ une fonction telle que 0 soit valeur régulière de $\frac{\partial S}{\partial v}$. Soit

$$\Sigma_S = \left\{ (q, v), \frac{\partial S}{\partial v} = 0 \right\}.$$

Montrer que

$$\begin{array}{rccc} i_S : & \Sigma_S & \longrightarrow & T^*M \\ & (q, v) & \longmapsto & (q, \frac{\partial S}{\partial q}) \end{array}$$

est une immersion lagrangienne exacte.

Exercice 2 Soit L_1 et L_2 des sous-variétés lagrangiennes de T^*M_1 et T^*M_2 de fonctions génératrices S_1 et S_2. Déterminer une fonction génératrice de $L_1 \times L_2$ dans $T^*(M_1 \times M_2)$.

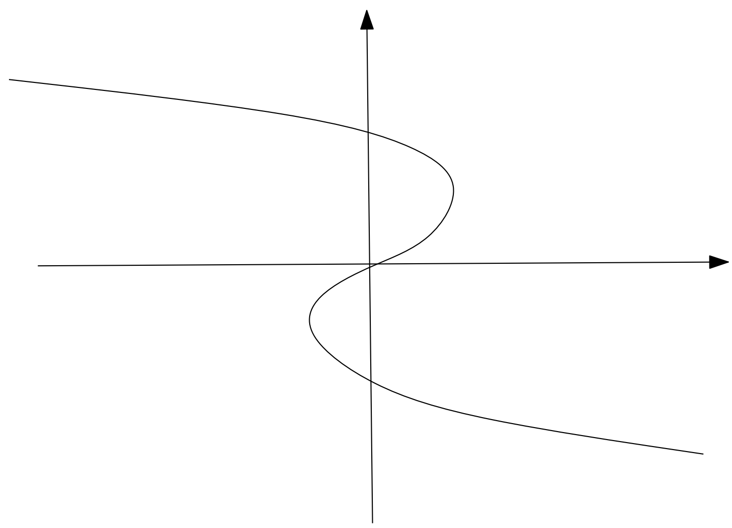
Exercice 3 Déterminer une fonction génératrice de graphe L_α d'une 1-forme exacte α dans T^*M. Que peut-on dire sur les points d'intersection de L_α et de la section nulle ?

Exercice 4 Dessiner Σ_S, L_S et le front d'onde $\{(q, S(q, v)), (q, v) \in \Sigma_S\}$ pour les fonctions génératrices suivantes :

$$\begin{array}{rccc} S : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (q, v) & \longmapsto & q^2 v + \frac{1}{3} v^3 - v \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} S : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (q, v) & \longmapsto & -qv + \frac{1}{3} v^3 \end{array}.$$

Déterminer une fonction génératrice quadratique à l'infini de



Exercice 5 Montrer que tout hypersurface compacte coorientée de $\mathbb{R}^n$ admet une immersion lagrangienne dans $\mathbb{R}^{2n-2}$.