

Exercice 1

1. Donner une construction géométrique d'une immersion $f : T^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dont l'application de Gauss orientée a une image contenue dans un voisinage d'un hémisphère.
2. Soit $f_0 : T^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une immersion quelconque. Montrer qu'il existe une immersion C^0 -proche de f_0 dont l'application de Gauss orientée évite un point de S^2 .
3. Que se passe-t-il si on demande à l'application de Gauss orientée d'éviter deux points antipodaux ?
4. Question ouverte (Gromov) : Existe-t-il une immersion dont l'application de Gauss orientée évite les quatre sommets d'une tétraèdre régulier inscrit dans S^2 ?

Exercice 2 Montrer que toute variété ouverte de dimension $2n$ admet une forme symplectique si et seulement si elle admet une 2-forme non dégénérée. *Indication : On pourra considérer la relation différentielle $\mathcal{R}_0 = \{\kappa \in E^{(1)}, (d\kappa)^n \neq 0\}$ où $E = T^*M$ et montrer qu'elle satisfait au h-principe.*

Exercice 3 Existe-t-il un h-principe relatif pour les immersions de D^2 dans \mathbb{R}^2 ?