**Exercice 1** La relation différentielle associée aux submersions de $M^m$ dans $N^n$ (pour $m \geq n$) est-elle ouverte, ample, diff$(M)$-invariante ?

**Exercice 2** Une $k$-mersion $f : M^m \to N^n$ est une application $\mathcal{C}^1$ telle que $\mathrm{rg}(\mathrm{d}f_x) \geq k$ en tout point $x \in M$. On note $I^k(M,N)$ l'espace des $k$-mersions.

1. Soit $m > 0$. Pour $k = 1, \dots, m$ donner une $k$-mersion de $S^m$ dans $\mathbb{R}^{k+1}$.
2. (a) Montrer que si $k \leq n-1$ la relation différentielle des $k$-mersions $\mathcal{I}^k(M,N)$ satisfait au h-principe paramétrique.
   (b) Si $k = n$, la relation $\mathcal{I}^k(M,N)$ satisfait-elle toujours au h-principe ?
3. (a) Montrer que la fibre de $\mathcal{I}^1(M,N) \to M \times N$ se rétracte par déformation forte sur $S^{mn-1}$.
   (b) Déterminer le cardinal de $\pi_0(I^1(S^1,\mathbb{R}^n))$.

**Exercice 3** On note $I(T^2,\mathbb{R}^3)$ l'espace des immersions de $T^2$ dans $\mathbb{R}^3$. On rappelle que $\pi_1(\mathrm{S0}(3)) = \mathbb{Z}_2$ et $\pi_2(\mathrm{S0}(3)) = 0$. On admet que $\pi_0\left(\mathcal{C}^0(T^2 \setminus \{\mathrm{pt}\}, \mathrm{S0}(3))\right) = \pi_0\left(\mathcal{C}^0(T^2, \mathrm{S0}(3))\right)$.

1. Si $f \in I(T^2,\mathbb{R}^3)$, on note
$$\begin{array}{cccc} D_f : & T^2 & \longrightarrow & \mathrm{GL}_+(3) \\ & (\theta,\phi) & \longmapsto & \left(\frac{\partial f}{\partial \theta}, \frac{\partial f}{\partial \phi}, \frac{\partial f}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial f}{\partial \phi}\right) \end{array}$$
   On pose $N_1(f) = \left[D_{f|S^1\times\{0\}}\right] \in \pi_1(\mathrm{GL}_+(3))$ et $N_2(f) = \left[D_{f\{0\}\times|S^1}\right] \in \pi_1(\mathrm{GL}_+(3))$. Montrer que $\pi_0(I(T^2,\mathbb{R}^3))$ contient quatre éléments et que les immersions de $T^2$ dans $\mathbb{R}^3$ sont classées à homotopie près par $N_1$ et $N_2$.
2. On considère une base orthonormale $(e_1,e_2,e_3)$ de $\mathbb{R}^3$. On note $R(v,\theta) \in \mathrm{S0}(3)$ la rotation d'axe $v$ et d'angle $\theta$. On pose $e_i^\theta = R(e_3,\theta)e_i$.
   (a) Montrer que $\theta \mapsto R(v,\theta)$ est un lacet générateur de $\pi_1(\mathrm{S0}(3))$. *Indication : penser à une suite exacte longue d'homotopie.*
   (b) Déterminer la classe dans $\pi_1(\mathrm{S0}(3))$ du lacet $\theta \mapsto R(e_1^\theta,\theta) \circ R(e_3,\theta)$.
   (c) Déterminer la classe dans $\pi_1(\mathrm{GL}_+(3))$ du lacet $\theta \mapsto (e_2, \delta(\theta), e_2 \wedge \delta(\theta))$ où $\delta : [0,2\pi] \to \mathrm{Vect}(e_1,e_3) \setminus \{0\}$.
3. Soient $\gamma_1 : S^1 \to \{x_1e_1 + x_3e_3, x_1 > 0\}$ une immersion et $\gamma_2 : S^1 \to B(0,\epsilon) \subset \mathrm{Vect}(e_1,e_3)$ une immersion en forme de huit de point double 0 et telle que $\gamma_2(0)$ et $\gamma'(0) = e_3$. On note $f_0$ l'immersion standard du tore dans $\mathbb{R}^3$. On considère les immersions définies par
$$\begin{aligned} f_1(\theta,\phi) &= R(e_3,\theta)(\gamma_1(\phi)) \\ f_2(\theta,\phi) &= e_1^\theta + R(e_2^\theta,\theta)(\gamma_2(\phi)) \\ f_3(\theta,\phi) &= f_0(\theta+\phi,\phi). \end{aligned}$$
   Déterminer dans quelles classes se trouvent $f_0$, $f_1$, $f_2$ et $f_3$.

4. Soit

$$\begin{array}{rccc} r: & T^2 & \longrightarrow & \mathrm{GL}_+(3) \\ & (\theta, \phi) & \longmapsto & (\theta, -\phi). \end{array}$$

On dit qu'on peut retourner $f$ s'il existe une homotopie régulière reliant $f$ et $f \circ r$. Montrer que tout élément de $I(T^2, \mathbb{R}^3)$ peut être retourné.