Exercice 1 Soient M une variété et S une sous-variété de M. Pour $x \in S$ on note

$$N_x^*S = \{\alpha \in T_x^*M, \alpha(v) = 0 \text{ pour tout } v \in T_xS\}.$$

On pose

$$N^*S = \{(x, \alpha) \in T^*M, x \in S \text{ et } \alpha \in N_x^*S\}.$$

1. Déterminer N^*S si S est un point et si $S = M$.
2. Donner la dimension de N^*S.
3. Montrer que N^*S est une sous-variété lagrangienne de T^*M (muni de la structure symplectique standard).

Exercice 2 Soit $\epsilon > 0$. Soit C un carrré de côté 1. Montrer qu'il existe un hamiltonien H_t de flot ϕ_t tel que

1. $\sup H_t - \inf H_t < 1 + \epsilon$ pour tout $t \in [0, 1]$;
2. $\phi_1(C) \cap C = \emptyset$.

Que peut-on dire dans le cas d'un disque ?

Exercice 3 Montrer que tout symplectomorphisme lisse de $\mathbb{R}^{2n}$ est isotope (parmi les symplectomorphismes) à un symplectomorphisme linéaire. Les symplectomorphismes lisses de $\mathbb{R}^{2n}$ sont-ils tous hamiltoniens ?

Exercice 4 Soit H un hyperblan de $(\mathbb{R}^n, \langle, \rangle)$. Soient B_0 et B_1 deux boules de rayon R contenues chacune dans une composante connexe de $\mathbb{R}^n \setminus H$ et B' une boule de H de rayon r. Soit $H' = H \setminus B'$. Montrer qu'il existe isotopie $(\phi_t)_{t\in[0,1]}$ telle que

1. $\phi_t : B(0, R) \to \mathbb{R}^n \setminus H'$ est un plongement préservant le volume pour tout $t \in [0, 1]$;
2. $\phi_1(B(0, R)) = B_0$;
3. $\phi_1(B(0, R)) = B_1$.

Exercice 5 Soient $A = S^1 \times [-1, 1]$ et $\tilde{A} = \mathbb{R} \times [-1, 1]$. On note (p, q) les coordonnées de A' et on considère la forme volume $\mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q$. L'objectif de l'exercice est de montrer le théorème suivant dans deux cas particuliers.

Définition 1 *Un homéomorphisme $f : A \to A$ vérifie la condition (C) si f admet un relevé*

$$\begin{array}{rccc} \tilde{f} : & \tilde{A} & \longrightarrow & \tilde{A} \\ & (p, q) & \longmapsto & (p + a(p, q), q + b(p, q)) \end{array}$$

où

1. *$b(p, \pm 1) = 0$ (f préserve les composantes de bord) ;*
2. *$a(p, 1) > 0$ et $a(p, -1) < 0$ (f fait tourner les composantes de bord dans des sens différents).*

Théorème 1 (Poincaré-Birkhoff) *Soit f un homéomorphisme de A qui préserve le volume et vérifie la condition (C). Alors f a au moins deux points fixes.*

1. Donner un exemple de difféomorphisme de l'anneau sans point fixe et vérifiant la condition (C) mais ne préservant pas le volume.
2. Donner un exemple de difféomorphisme de l'anneau préservant le volume et ayant exactement deux point fixes.
3. On suppose que f est le flot au temps 1 de l'hamiltonien h.
   (a) Montrer que les points critiques de h sont des points fixes de f. En déduire que f a au moins un point fixe.
   (b) On suppose que h atteint son maximum en un unique point de A. On obtient un deuxième point critique de h par la méthode du minimax. Soit
   $$C = \{\gamma : [-1,1] \to A, \gamma \text{ est } \mathcal{C}^1 \text{ et } \gamma(\pm 1) \in S^1 \times \{\pm 1\}\}.$$
   On pose
   $$c = \inf_{\gamma \in C} \left(\max_{t \in [-1,1]} h(\gamma(t)) \right).$$
   Montrer que c est une valeur critique de h.
   (c) Conclure.
4. On suppose maintenant que $\det(\mathrm{d}\tilde{f} + \mathrm{Id}) \neq 0$. Sur $\tilde{A} \times \tilde{A}$ muni de coordonnées (p, q, p', q'), on considère la forme symplectique $\mathrm{d}p' \wedge \mathrm{d}q' - \mathrm{d}p \wedge \mathrm{d}q$. On note G le graphe de f. Soit
   $$\begin{array}{cccc} \Theta : & \tilde{A} \times \tilde{A} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \times \tilde{A} \\ & (p, q, p', q') & \longmapsto & \left(q - q', p' - p, \frac{p+p'}{2}, \frac{q+q'}{2} \right) \end{array}.$$
   On note (P_1, P_2, Q_1, Q_2) les coordonnées sur $\mathbb{R}^2 \times \tilde{A}$. On considère la forme symplectique $\mathrm{d}P_1 \wedge \mathrm{d}Q_1 + \mathrm{d}P_2 \wedge \mathrm{d}Q_2$.
   (a) Montrer que Θ est un plongement symplectique.
   (b) Montrer que sur $\Theta(G)$ on a
   $$\mathrm{d}P_1 \wedge \mathrm{d}Q_1 + \mathrm{d}P_2 \wedge \mathrm{d}Q_2 = 0$$
   $$P_1 = P_1(Q_1, Q_2), P_2 = P_2(Q_1, Q_2).$$
   (c) Montrer qu'il existe $\tilde{S} : \tilde{A} \to \mathbb{R}$, 1-périodique en Q_1, constante le long du bord et de gradient sortant et telle que (p, q) est un point fixe de $\tilde{f}$ si et seulement si (p, q) est un point critique de $\tilde{S}$.
   Indication : on pourra considérer la 1-forme $\alpha = P_1(Q_1, Q_2)\mathrm{d}Q_1 + P_2(Q_1, Q_2)\mathrm{d}Q_2$.
   (d) Conclure.