Structures complexes

Exercice 1 Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique. Soit J une structure complexe calibrée par ω. On considère le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle = \omega(\cdot, J\cdot)$. Monter qu'un sous-espace vectoriel L est lagrangien si et seulement si $L^\perp = JL$.

Exercice 2 Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique. Soit $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire quelconque sur V.

1. Montrer qu'il existe un isomorphisme A antisymétrique (pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$) tel que pour tous $u, v \in V$ on ait $\langle u, v \rangle = \omega(u, Av)$.
2. Monter qu'il existe B symétrique définie positive et J orthogonale pour $\langle \cdot, \cdot \rangle$ telles que $A = BJ$, $J^2 = -\mathrm{Id}$ et A et B commutent.
3. Montrer que J est calibrée par ω.
4. Montrer que l'espace des structures calibrées est contractile.

Exercice 3 Soit $\mathbb{R}^{2n}$ muni de la base $(e_1, \dots e_n, f_1, \dots f_n)$ et de la forme symplectique standard.

1. Soient X et Y dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,
$$Z = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n,n}$$
et L son image. Montrer que L est lagrangien si et seulement si Z est de rang n et ${}^tXY = {}^tYX$. En particulier montrer que $L = \{(x, Ax), x \in \mathbb{R}^n\}$ est lagrangien si et seulement si A est symétrique.
2. Soit $L_0 = \mathrm{Vect}\{f_1, \dots, f_n\}$. On note $\mathcal{L}(L_0)$ l'espace des sous variétés lagrangiennes qui intersectent L_0 transversalement. On considère l'application
$$\begin{array}{cccc} \Phi : & S(n) & \longrightarrow & \mathcal{L}(L_0) \\ & A & \longmapsto & L = \{(x, Ax), x \in \mathbb{R}^n\}. \end{array}$$
Montrer que Φ est un homéomorphisme. En déduire que $\mathcal{L}(L_0)$ est contractile.

Exercice 4 Décrire les composantes connexes de l'espace des structures complexes de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5 Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique. Déterminer la dimension de $\mathcal{J}_{\mathrm{cal}}$. Montrer que l'espace tangent en J à $\mathcal{J}_{\mathrm{cal}}$ est
$$\{S \in \mathrm{End}(V), JS + SJ = 0 \text{ et } \omega(Su, v) + \omega(u, Sv) = 0\}.$$

Exercice 6 Soit (V, ω) un espace vectoriel symplectique, soit L_0 un sous-espace lagrangien de V. On note $\mathcal{L}(L_0)$ l'espace des sous variétés lagrangiennes qui intersectent L_0 transversalement et $\mathcal{G}(L_0)$ l'espace des formes bilinéaires symétriques définies positives sur L_0. On considère l'application
$$\begin{array}{cccc} \Psi : & \mathcal{J}_{\mathrm{cal}} & \longrightarrow & \mathcal{L}(L_0) \times \mathcal{G}(L_0) \\ & J & \longmapsto & (JL_0, \langle \cdot, \cdot \rangle_{L_0}) \end{array}$$
où $\langle \cdot, \cdot \rangle = \omega(\cdot, J\cdot)$.

1. Montrer que Ψ est bien définie.
2. Construire Ψ^{-1} et montrer que Ψ est un homéomorphisme.
3. Montrer que l'espace des structures calibrées est contractile.

Structures symplectiques

Exercice 7 Classer les structures symplectiques sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 8 Classer les structures symplectiques sur le cylindre de dimension 2.

Exercice 9 Classer les structures symplectiques sur les surfaces compactes.

Indice de Maslov

Exercice 10 Décrire l'indice de Maslov dans le cas de $\mathbb{R}^2$ muni de la structure symplectique standard.

Exercice 11 Soit $\mathbb{R}^{2n}$ muni de la base $(e_1, \dots e_n, f_1, \dots f_n)$ et de la forme symplectique standard. Calculer l'indice de Maslov de $t \to \{A_t x, x \in \mathbb{R}^n\}$ où

$$A_t = \begin{pmatrix} \cos(t) & 0 \\ 0 & \cos(2t) \\ \sin(t) & 0 \\ 0 & \sin(2t) \end{pmatrix}.$$

Indications

Exercice 5. Utiliser l'application de Cayley-Sévennec.
Exercice 6 - Construction de Ψ^{-1}. Soient $L \in \mathcal{L}(L_0)$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ un produit scalaire sur L_0. Si $v \in L_0$ alors $(v^\perp)^\omega \cap L$ est de dimension 1. On choisit une base orthogonale $(e_1, \dots, e_n)$ de L_0 et on définit $J \in \mathcal{L}(L_0, L)$ en choisissant pour Je_i le vecteur dans $(e_i^\perp)^\omega \cap L$ tel que $\omega(e_i, Je_i) = 1$. Sur $V = L_0 \oplus L$ on pose

$$J_L = \begin{pmatrix} 0 & J \\ -J^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Monter que $(\mathbb{R}^2, \omega)$ est symplectomorphe à

$$\left(D\left(0, \sqrt{\frac{vol(\omega)}{\pi}}\right), \omega_0 \right).$$

Commencer par rendre la forme standard au voisinage de 0 puis rendre les aires des disques $D(0, R)$ égales à πR^2.
Exercice 9. Utiliser la méthode de Moser. Sur une variété compacte connexe orientée de dimension n, une n-forme est exacte si et seulement si elle est d'intégrale nulle.