Théorie homotopique

Exercice 1 Soit $A \subset X$. Montrer qu'une rétraction par déformation de X sur A induit une équivalence d'homotopie et une équivalence d'homotopie faible entre A et X.

Exercice 2 Calculer $\pi_1\left(\mathbb{R}P^2\right)$.

Exercice 3 Déterminer le type d'homotopie de $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{point}\}$ et de $\mathbb{R}^3 \setminus \{\text{droite}\}$.

Espace des jets

Exercice 4 Soit $p : X \to M$ un fibré. Monter que le fibré $X^{(1)} \to X$ est affine.

Exercice 5

1. Soit $p : X \to M$ un fibré. Essayer de faire agir $\mathrm{Diff}(M)$ sur $X^{(1)}$.
2. Soient M et N deux variétés. On considère le fibré trivial $M \times N \to M$. On note $J^1(M,N)$ l'espace des 1-jets associés. Un difféomorphisme $\phi \in \mathrm{Diff}(M)$ agit sur $J^1(M,N)$ par
$$\phi_*(x,y,L) = \left(\phi(x), y, L \circ \mathrm{d}\phi^{-1}_{\phi(x)}\right).$$
Décrire l'action de ϕ sur $j^1(f)$ où $f : M \to N$.
3. L'action de $\mathrm{Diff}(M)$ sur T^*M est donnée par
$$\phi^*(j^1\alpha(x)) = (j^1(\phi^*\alpha)(\phi(x))).$$
Décrire explicitement cette action quand $M = \mathbb{R}$.

Exercice 6 Soit $f : M \to N$ une application lisse. On peut définir $\mathrm{d}f$, $j^1 f$ et $j^2 f$ mais pas $\mathrm{Hess}(f)$ en général. Pourquoi ?

h-principe

Exercice 7 La relation différentielle $y' = y$ dans $J^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ satisfait-elle au h-principe ? Même question pour la relation $y' = y^2$.

Exercice 8 Soit $\delta \in]0,1]$. On pose $A_\delta = \left\{(x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2, \delta^2 < x_1^2 + x_2^2 < 4\right\}$. On suppose que la relation des submersions de A_δ dans $\mathbb{R}$ satisfait au h-principe dans $J^1(A_\delta,\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un famille de fonctions $f_t : A_\delta \to \mathbb{R}$ telle que

1. $f_0(x_1,x_2) = -(x_1^2 + x_2^2)$;
2. $f_1(x_1,x_2) = x_1^2 + x_2^2$;
3. $\mathrm{grad}(f_t) \neq 0$.