Variétés symplectiques

Exercice 1 On considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{S}^{2n+1} & \xrightarrow{j} & \mathbb{C}^{n+1}\setminus\{0\} \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\pi} & & \\ \mathbb{P}^n(\mathbb{C}) & & \end{array}$$

Monter qu'il existe une unique 2-forme σ sur $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ telle que $\pi^*\sigma = j^*\omega$. Monter que c'est une forme symplectique.

Exercice 2 Quelles sphères admettent des structures symplectiques ?

Difféomorphismes hamiltoniens

Exercice 3 Montrer que X_t est un champ hamiltonien si et seulement si

1. $\phi_t^*\omega = \omega$ où ϕ_t est le flot de X_t ;
2. $\int_c \iota_{X_t}\omega = 0$ pour tout lacet c.

Exercice 4 Soit ϕ un difféomorphisme hamiltonien. Montrer que l'on peut supposer que la fonction hamiltonienne associée à ϕ est 1-périodique en temps.

Valeurs propres de $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$

Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n$. Soit

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id} \\ \mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}), {}^tAJ_0A = J_0\}$.

Exercice 5 On considère A et J_0 sur $\mathbb{C}^{2n}$. On note E_λ le sous-espace caractérisitique associé à la valeur propre λ.

1. Montrer que le polynôme caractérisitique de $A \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ est symétrique : $\det(A - \lambda\mathrm{Id}) = \lambda^{2n}\det\left(A - \frac{1}{\lambda}\mathrm{Id}\right)$.
2. Soient λ et μ deux valeurs propres de A telles que $\lambda\mu \neq 1$. Soient n_λ et n_μ dans $\mathbb{N}^*$. Montrer que si $u \in \ker\left((A - \lambda\mathrm{Id})^{n_\lambda}\right)$ et $v \in \ker\left((A - \mu\mathrm{Id})^{n_\mu}\right)$ alors $\omega(u, v) = 0$.
3. Monter que ω est non dégénérée en restriction à E_1 et E_{-1}.
4. Pour toute valeur propre λ différente de 1 et -1, montrer que la restriction de ω à $E_\lambda \oplus E_{\frac{1}{\lambda}}$ est non dégénérée.

Exercice 6 Montrer que si $A \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ alors A est diagonalisable dans une base symplectique.

Décomposition polaire

Exercice 7

1. Monter que pour tout $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, il existe un unique couple
$$(H, Q) \in \mathrm{S}^{++}(2n) \times \mathrm{U}(n)$$
tel que $M = HQ$.
2. Que peut-on dire si $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$?
3. Monter que
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) & \longrightarrow & \mathrm{S}^{++}(2n) \times \mathrm{U}(n) \\ M & \longmapsto & (H, Q) \end{array}$$
est un homéomorphisme.

Exercice 8 Montrer que si $A \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) \cap \mathrm{S}^{++}(2n)$, alors $A^\alpha \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ pour tout $\alpha > 0$.

Exercice 9

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ est homéomorphe à $\mathrm{U}(n) \times \mathbb{R}^{n(n-1)}$.
2. Montrer que $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ est connexe et donner son groupe fondamental.
3. En déduire le déterminant des matrices symplectiques.

Groupe symplectique

On note $\mathrm{Ham}(M)$ l'ensemble des difféomorphismes hamiltoniens de M et $\mathrm{Symp}(M)$ l'ensemble des symplectomorphismes.

Exercice 10 Monter que $\mathrm{Ham}(M)$ est un sous-groupe distingué et connexe par arcs de $\mathrm{Symp}(M)$.

Exercice 11 On suppose M connexe par arcs. Monter que $\mathrm{Symp}(M)$ agit transitivement sur l'ensemble des vecteurs tangents non nuls de M.

Sous-variétés lagrangiennes

Exercice 12 Soient (M_1, ω_1) et (M_2, ω_2) deux variétés symplectiques. On note p_1 et p_2 les projections de $M_1 \times M_2$ sur M_1 et M_2.

1. Monter que $\omega = p_1^* \omega_1 - p_2^* \omega_2$ est une forme symplectique que $M_1 \times M_2$.
2. Soit $\phi : M_1 \longmapsto M_2$. Montrer que ϕ est symplectique si et seulement si son graphe est lagrangien dans $(M_1 \times M_2, \omega)$.

Exercice 13 Déterminer les sections lagrangiennes du fibré cotangent muni de la structure symplectique standard.

Exercice 14

1. Déterminer les sous variétés lagrangiennes compactes de S^2.
2. On dit qu'une sous-variété lagrangienne L de M est *déplaçable* s'il existe un difféomorphisme hamiltonien ϕ tel que $\phi(L) \cap L = \emptyset$. Déterminer les cercles déplaçables de S^2.