ENS Lyon **TD 2** **26/09/2012**
Géométrie symplectique

Exercice 1 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et ω une forme volume sur E. La divergence du champ de vecteur X par rapport à ω est le réel $\mathrm{div}_\omega X$ tel que

$$L_X\omega = \mathrm{div}_\omega X\omega.$$

1. Déterminer $\mathrm{div}_\omega X$ pour la forme standard ω sur $\mathbb{R}^n$.
2. Calculer $\mathrm{div}_\omega fX$.
3. Monter que le flot de X laisse ω invariante si et seulement si $\mathrm{div}_\omega X = 0$.

Exercice 2 Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit g une forme bilinéaire définie positive sur E de matrice G dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. On considère

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & E & \longrightarrow & E^* \\ & v & \longmapsto & g(v, \cdot). \end{array}$$

1. Montrer que E et $(E^*)^*$ sont canoniquement isomorphes.
2. Calculer la norme subordonnée de $\Phi(v) : E \to \mathbb{R}$.
3. On définit un produit scalaire sur E^* par $g^*(\lambda_1, \lambda_2) = g(\Phi^{-1}(\lambda_1), \Phi^{-1}(\lambda_2))$. Déterminer la matrice associée dans le base $(e_1^*, \ldots, e_n^*)$.

Exercice 3 Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ et $g : U \to B$ une application lisse où B est l'ensemble des formes bilinéaires symétriques définies positives sur $\mathbb{R}^n$ (ou plus généralement une variété M munie d'une métrique riemannienne g). Pour tout courbe $\gamma : [a, b] \to U$ continue et $\mathcal{C}^1$ par morceaux, on définit

$$E(\gamma) = \frac{1}{2}\int_a^b g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))\mathrm{d}t \text{ et } L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\dot\gamma(t), \dot\gamma(t))}\mathrm{d}t.$$

1. Monter que L est invariant par reparamétrage. Si $\dot\gamma(t) \neq 0$ pour tout $t \in [a, b]$ montrer qu'il existe un reparamétrage de γ de vitesse constante.
2. Montrer qu'une courbe lisse $\gamma : [0, 1] \to U$ reliant x et y minimise E si et seulement si γ minimise L et est de vitesse constante.
3. Déterminer le hamiltonien associé à E.

Exercice 4 Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n$. Soit

$$J_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{Id} \\ \mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix}.$$

On pose $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{GL}_{2n}(\mathbb{R}), A^t J_0 A = J_0\}$.

1. Monter que $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ est un groupe stable par transposition.
2. Décrire $\mathrm{Sp}(2, \mathbb{R})$.
3. Monter que tout élément de $\mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ est de déterminant 1.
4. Montrer que les valeurs propres de $A \in \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{R})$ peuvent être regroupées en paires $\lambda, \frac{1}{\lambda} \in \mathbb{R}$, $\lambda, \lambda^{-1} \in S^1$ et en quadruplets $\lambda, \frac{1}{\lambda}, \overline{\lambda}, \frac{1}{\overline{\lambda}}$.