**ENS Lyon** **TD 1** **19/09/2012**
**Géométrie symplectique**

---

**Exercice 1** Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ un fonction lisse et strictement convexe. On note $g$ sa transformée de Legendre.

1. Quel est le domaine de définition de $g$ ?
2. Montrer que $g$ est strictement convexe.
3. Montrer que la transformée de Legendre de $g$ est $f$.

**Exercice 2** Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels strictement positifs. On considère

$$H : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{2n} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} a_j\left(x_j^2+y_j^2\right) \end{array}.$$

1. Déterminer le système hamiltonien associé et le résoudre.
2. Trouver les orbites périodiques dans le niveau $H^{-1}(c)$ pour $c > 0$ pour $n = 2$ et déterminer les périodes associées.
3. Déterminer le lagrangien et les équations d'Euler-Lagrange associés.

**Exercice 3** Montrer que le flot d'un champ hamiltonien préserve le volume.

**Exercice 4** Soit $V$ un espace vectoriel de dimension $m$. Soit $\Omega$ une forme bilinéaire alternée sur $V$. Montrer qu'il existe une base $(u_1, \ldots, u_k, e_1, \ldots, e_n, f_1, \ldots, f_n)$ de $V$ telle que

- $\Omega(u_i, v) = 0$ pour $i = 1, \ldots, k$ et $v \in V$ ;
- $\Omega(e_i, e_j) = \Omega(f_i, f_j) = 0$ pour $i, j = 1, \ldots, n$ ;
- $\Omega(e_i, f_j) = \delta_{i,j}$ pour $i, j = 1, \ldots, n$.

Écrire la matrice de $\Omega$ dans cette base.

**Exercice 5** Soit $V$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension $2n$. Soit $\Omega_0$ la forme bilinéaire décrite par la matrice

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ -\mathrm{Id} & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $Y$ est un sous-espace vectoriel de $V$ on pose

$$Y^\Omega = \{v \in V, \Omega(v,w) = 0 \text{ pour tout } w \in Y\}.$$

1. Que peut-on dire de $\Omega_0$ ?
2. Montrer que $\dim(Y) + \dim(Y^\Omega) = 2n$.
3. Montrer que $(Y^\Omega)^\Omega = Y$ et que $U \subset W \Longleftrightarrow W^\Omega \subset U^\Omega$.