Exercice 1.

1. Soit X un espace métrique. On suppose que $X = \bigsqcup_{i \in I} C_i$ où les C_i sont des ouverts connexes disjoints non vides. Montrer que les C_i sont les composantes connexes de X.
2. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ s'écrit comme une réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.

Exercice 2. Soit E un sous-espace vectoriel de $C^1([0,1];\mathbb{R})$ tel que pour tout $f \in E$, $||f'||_\infty \leq ||f||_\infty$. On suppose que E est fermé pour la norme C^0. Montrer que E est de dimension finie.

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On suppose $f(0,0) = 0$ et $df_{(0,0)} = 0$. Pour $x, t \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$, soit

$$F(x,t) = \frac{1}{x^2} f(x, tx)$$

Montrer que F se prolonge en une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$. Calculer $F(0,t)$.

Exercice 4. Soit U le plan privé de l'origine. On définit $f : U \to \mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$$

Montrer que f est un difféomorphisme local au voisinage de tout point de U, mais n'est pas un difféomorphisme global.
Expliciter des ouverts U et W, “aussi grands que possible", tels que $f : U \to W$ soit un difféomorphisme global.

Exercice 5. Fonctions homogènes
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ de classe C^1 et homogène de degré k, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0, f(tx) = t^k f(x).$$

1. Montrer que $df_x(x) = kf(x)$.
2. Montrer que $df : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est homogène de degré $k-1$.
3. On se place dans le cas $k = 2$ et on suppose que f est de classe C^2. Montrer que f est quadratique.

Exercice 6. Soient U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application différentiable.

1. Montrer que f est convexe si et seulement si, pour tous $x, y \in U$

$$f(y) - f(x) \geq df_x(y - x).$$

2. On suppose maintenant que f est C^2 sur U. Montrer que f est convexe si et seulement si d^2f est une forme quadratique positive en tout point.
3. Que peut-on dire d'un point x tel que $df_x = 0$?

Exercice 7. On considère le système d'équations suivant, pour un paramètre réel t :

$$x = \frac{1}{2}\sin(x+y) + t - 1,\ y = \frac{1}{2}\cos(x-y) - t + \frac{1}{2}$$

aux inconnues x et y.

(i) Montrer que ce système admet une unique solution $(x(t), y(t))$ et que ces fonctions de t sont indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

(ii) Donner un développement limité à l'ordre deux de $x(t)$ et $y(t)$ au point $x = y = 0$.

(iii) Généralisation : Soit $f : (x, \lambda) \mapsto f(x, \lambda)$ une application de classe C^1 de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il existe k tel que, pour tous x, λ

$$||\partial_1 f(x, y)|| \leq k < 1.$$

Montrer que l'équation $f(x, \lambda) = x$ admet pour chaque λ une unique solution $x = x(\lambda)$, et que l'application $\lambda \mapsto x(\lambda)$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^p$. Calculer $Dx(\lambda)$.

Exercice 8. On se place dans $M_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe un voisinage $\mathcal{U}$ de Id tel que :

1. Pour $A \in \mathcal{U}$, il existe un unique $B \in M_n(\mathbb{R})$ tel que $A = B^2$. On note $B = \sqrt{A}$.
2. l'application $\psi : \begin{cases} \mathcal{U} \to M_n(\mathbb{R}) \\ A \mapsto \sqrt{A} \end{cases}$ est C^1. Est-elle C^∞ ?

Exercice 9. Soit la fonction définie sur $\mathbb{R}$ suivante :

$$f(x) = x + x^2 \sin(\frac{\pi}{x}) \text{ si } x \neq 0, f(0) = 0.$$

Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$, que $f'(0) \neq 0$, mais que f n'est inversible sur aucun voisinage de 0. Pourquoi le théorème d'inversion locale ne s'applique-t-il pas ici ?

Exercice 10.

Soit A une matrice de $M_n(\mathbb{C})$ et λ une valeur propre simple de A. Montrer qu'il existe un voisinage ouvert Ω de A dans $M_n(\mathbb{C})$ et une application C^∞, $\phi : \Omega \to \mathbb{C}$ telle que $\phi(B)$ soit une valeur propre de B pour tout B.