ENS de Lyon **TD 8** **18/10/2012**
Révisions

Exercice 1. Soit $f : E \to F$ une application linéaire entre deux espaces vectoriels normés. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

1. f est continue ;
2. f est uniformément continue ;
3. f est continue en 0 ;
4. f est bornée sur la boule unité de E.

Exercice 2. Soient X un espace métrique et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de X convergeant vers x. Montrer que $\{x_n, n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ est compact.

Exercice 3. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie et U un ouvert de E qui contient $\{x \in E \text{ tels que } x \leq 1\}$. Montrer qu'il existe $r > 1$ tel que U contient $B(0, r)$. Ce résultat reste-il vrai en dimension infinie ?

Exercice 4. On dit qu'une application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^q$ est *propre* si l'image réciproque de tout compact est compacte.

1. Montrer que f est propre si et seulement si $\lim_{\|x\|\to\infty} \|f(x)\| = +\infty$.
2. Montrer qu'une application propre $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ minorée atteint son minimum.

Exercice 5. Soit E un espace vectoriel normé séparable. On considère une suite $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de formes linéaires continues. On suppose qu'il existe $M > 0$ tel que $\|\lambda_n\| < M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe une sous-suite de $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement.

Exercice 6.

1. Soit X un espace métrique. On suppose que $X = \bigcup_{i\in I} C_i$ où les C_i sont des ouverts connexes disjoints. Montrer que les C_i sont les composantes connexes de X.
2. Montrer que tout ouvert de $\mathbb{R}$ s'écrit comme une réunion dénombrable d'intervalles ouverts disjoints.

Exercice 7. Soit E un espace de fonctions de classe C^1 de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ tel que $||f'||_\infty \leq ||f||_\infty$ pour tout $f \in E$. Montrer que E est de dimension finie.

Exercice 8. Soient (E, d) et (F, d') deux espaces métriques connexes.

1. Montrer que $E \times F$ est connexe.
2. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$ tels que $A \neq E$ et $B \neq F$. Montrer que $(E \times F) \setminus (A \times B)$ est connexe.

Exercice 9. Montrer qu'une intersection décroissante de parties compactes et connexes est connexe. Est-il vrai qu'une intersection décroissante de fermés connexes est connexe ?

Exercice 10.

1. Montrer que le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe. *Indication : si A et B sont deux matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, considérer le polynôme $P(z) = \det(zA + (1-z)B)$.*
2. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe. Décrire ses composantes connexes.
3. Si $M \notin GL_n(\mathbb{R})$, montrer que $GL_n(\mathbb{R}) \cup \{M\}$ est connexe par arcs.

Exercice 11. Soit E l'ensemble des applications f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telles que $|f(z)| \leq \frac{1}{1+|z|}$, $(\forall z \in \mathbb{C})$.

1. On définit $d(f,g) = \sup\{|f(z) - g(z)|, z \in \mathbb{C}\}$. Montrez que d est une distance sur E. Montrez que (E, d) est complet.
2. On définit $d'(f,g) = \sup\{(1+|z|)|f(z) - g(z)|, z \in \mathbb{C}\}$. Montrez que d' est une distance sur E. Montrez que (E, d') est complet.
3. Ces deux distances sont-elles topologiquement équivalentes ?

Exercice 12. Montrer que l'espace $C^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de la norme $N_p(f) = (\int_0^1 |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ n'est pas complet. Que pensez-vous de son complété ?

Exercice 13. Soit (X, d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application.

1. Si f vérifie $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ dès que x et y sont des points distincts de X, montrer que f admet un unique point fixe dans X.
2. Si f préserve la distance $(d(f(x), f(y)) = d(x,y))$ montrer que f est bijective. *Indication : montrer que si x est un point de X et $f^{n(k)}(x)$ a une limite, alors $f^{n(k+1)-n(k)}(x)$ converge vers x.*
3. Si f est continue et vérifie $d(f(x), f(y)) \geq d(x,y)$ alors f est bijective et on a $d(f(x), f(y)) = d(x,y)$.

Exercice 14. Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, a un point de E, et $U = \{x \in E,\ 0 < ||x - a|| < R\}$. Soit f une application de classe C^1 de U dans F telle que pour tout x dans $U, ||Df(x)|| \leq k$. On suppose $\dim E > 1$.

1. Montrer : $\forall (x,y) \in U^2,\ ||f(x) - f(y)|| \leq k||x - y||$
2. Montrer que f admet une limite α au point a.
3. On suppose que $Df(x)$ admet une limite $L \in \mathcal{L}(E, E)$ en a, et on prolonge f en posant $f(a) = \alpha$. Montrer que f est différentiable en a, et que $Df(a) = L$. L'application f ainsi prolongée est donc C^1.
   Indication : Considérer l'application définie par $g(x) = f(x) - L(x - a)$.