Exercice 1. Soient E un espace vectoriel normé de dimension finie, $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ et $\phi : E \longrightarrow E$ deux applications $\mathcal{C}^2$.

1. On suppose E euclidien. Exprimer $\nabla(f \circ \phi)$ à l'aide de ∇f et $d\phi$.
2. Exprimer $d^2(f \circ \phi)$ à l'aide de df et $d\phi$.

Exercice 2. Soit $f : S^1 \longrightarrow S^1$. On considère l'application

$$F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (r, \theta) & \longmapsto & (r, f(\theta)). \end{array}$$

À quelle condition sur f, l'application F est-elle différentiable à l'origine ? Quelle est alors sa différentielle ?

Exercice 3. On munit $\mathbb{R}^2$ de la norme euclidienne $\|\cdot\|$. Soient $A_1, \ldots, A_n$ des points de $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'application

$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \longmapsto & \sum_{i=1}^n \|A_i M\|^2. \end{array}$$

admet un minimum et déterminer le point où ce minimum est atteint.

Exercice 4.

1. Soient U et V deux ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to V$ un homéomorphisme. Montrer (sans utiliser le théorème d'inversion locale) que f et f^{-1} sont $\mathcal{C}^1$ si et seulement si f est $\mathcal{C}^1$ et df est inversible en tout point. On dit alors que f est un *difféomorphisme*.
2. Construire un difféomorphisme de $B(0,1)$ dans $]-1,1[^2$.
3. Construire un difféomorphisme de $B(0,1)$ dans $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. Soit U un ouvert de $\mathbb{C}$. Une application $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite *holomorphe* si

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h}$$

existe (on note $f'(z)$ cette limite) et si f' est continue. Une application $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est dite *analytique* si elle est développable en série entière au voisinage de chaque point de U.

1. Montrer qu'une application $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe si et seulement si f est $\mathcal{C}^1$ et $df(z)$ est $\mathbb{C}$-linéaire pour tout $z \in U$.
2. Montrer qu'une application $f : U \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe si et seulement si f est $\mathcal{C}^1$ et
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = i \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$
pour tout $(x, y) \in U$. On appelle cette dernière condition l'*équation de Cauchy-Riemann.*

3. Montrer qu'une application analytique est holomorphe.
4. On se propose de monter que toute application holomorphe est analytique. Soit $f : B(0,R) \longrightarrow \mathbb{C}$ une application holomorphe. On définit

$$\begin{array}{rlcl} F: & [0,R[\times \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (r,\theta) & \longmapsto & f(r\cos(\theta), r\sin(\theta)). \end{array}$$

   (a) Monter que F est $\mathcal{C}^1$. En utilisant l'équation de Cauchy-Riemann, donner une relation entre les dérivées partielles de F.

   (b) Monter que pour tout $r \in [0,R[$, il existe $(c_n(r))_{n\in\mathbb{Z}}$ tel quel

$$F(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n(r)e^{in\theta}$$

   et déterminer $(c_n(r))_{n\in\mathbb{Z}}$.

   (c) Monter que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, l'application c_n est $\mathcal{C}^1$ et vérifie l'équation différentielle

$$rc_n'(r) = nc_n(r).$$

   (d) Conclure.

Exercice 6. Donner un exemple de fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert U connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$ telle que $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ pour tout $(x,y) \in U$ mais telle qu'il n'existe pas d'application h satisfaisant $f(x,y) = h(y)$ pour tout $(x,y) \in U$.

Exercice 7. Soient U un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$ et $f : U \to \mathbb{R}$ une application différentiable.

1. Montrer que f est convexe si et seulement si, pour tous $x, y \in U$

$$f(y) - f(x) \geq df_x(y-x).$$

2. On suppose maintenant que f est $\mathcal{C}^2$ sur U. Montrer que f est convexe si et seulement si d^2f est une forme quadratique positive en tout point.
3. Que peut-on dire d'un point x tel que $df_x = 0$?