ENS de Lyon **TD 6 - Calcul différentiel** **9-11/10/2012**
Topologie

Exercice 1. Échauffement

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable, dériver les fonctions $u(x) = f(x, -x)$ et $g(x, y) = f(y, x)$.
2. Calculer la différentielle d'une application constante, linéaire et quadratique.

Exercice 2. Calculs de différentielles
Montrer que les applications suivantes sont différentiables et calculer leurs différentielles :

1. $\xi : \begin{cases} M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto tr(A^p) \end{cases}$
2. $\phi : \begin{cases} GL_n(\mathbb{R}) \to GL_n(\mathbb{R}) \\ A \mapsto A^{-1} \end{cases}$
3. $\psi : \begin{cases} M_{n,n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R} \\ A \mapsto \det(A) \end{cases}$ En déduire la formule : $\det(e^A) = e^{tr(A)}$.

Exercice 3. Un ouvert de $\mathbb{R}^2$ peut-il être difféomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^3$?

Exercice 4. Une caractérisation des applications C^1
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On pose $\Delta = \{(x, x); x \in \mathbb{R}\}$ et on définit :

$$F : \begin{cases} \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \Delta \to \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} \end{cases}$$

Montrer que F se prolonge continûment à $\mathbb{R}^2$ si et seulement si f est C^1.

Exercice 5. Montrer que le système d'équations

$$x = \frac{1}{2}\sin(x + y), \ \ y = \frac{1}{2}\cos(x - y)$$

admet exactement une solution.
Indication : Utiliser la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 6. Soit n un entier et soit E l'espace des polynômes de degré au plus n, muni de la norme de la convergence uniforme sur $[0, 1]$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1. Montrer que l'application suivante est différentiable :

$$\Phi : \begin{cases} E & \to \mathbb{R} \\ f & \to \int_0^1 \varphi(f(x))dx \end{cases}$$

L'application Φ est-elle de classe C^1 ?

Exercice 7. Gradients
Calculer le gradient des applications suivantes, trouver les points critiques et représenter graphiquement.

1. $f(x_1, x_2) = x_1 x_2$
2. $g(x_1, x_2) = x_1^4 + x_2^4 - x_1^2 - x_2^2$
3. $h(x_1, x_2) = x_1^2 + e^{-x_2^2}$

Exercice 8. Soit $P(z)$ un polynôme complexe. Montrer que P est différentiable et que sa différentielle est $\mathbb{C}$-linéaire.

Exercice 9. Normes

1. Une norme sur $\mathbb{R}^n$ peut-elle être différentiable en 0 ?
2. Soit $N_p(x) = (\sum_{i=1}^n |x_i|^p)^{\frac{1}{p}}$ la norme p sur $\mathbb{R}^n$. Pour $p = 1, 2, \infty$, déterminer les points de différentiabilité de N_p.

Exercice 10. Soient E et F deux espaces vectoriels normés de dimension finie, a un point de E, et $U = \{x \in E,\ 0 < ||x - a|| < R\}$. Soit f une application de classe C^1 de U dans F telle que pour tout x dans $U, ||Df(x)|| \leq k$. On suppose $\dim E > 1$.

1. Montrer : $\forall (x, y) \in U^2,\ ||f(x) - f(y)|| \leq k||x - y||$

2. Montrer que f admet une limite α au point a.

3. On suppose que $Df(x)$ admet une limite $L \in \mathcal{L}(E, E)$ en a, et on prolonge f en posant $f(a) = \alpha$. Montrer que f est différentiable en a, et que $Df(a) = L$. L'application f ainsi prolongée est donc C^1.
   Indication : Considérer l'application définie par $g(x) = f(x) - L(x - a)$.

Exercice 11. L'inversion conforme
Soit $(V, <,>)$ un espace vectoriel euclidien de dimension n. On définit l'application :

$$J : \begin{cases} V \setminus \{0\} & \to V \setminus \{0\} \\ x & \mapsto \dfrac{x}{< x, x >} \end{cases}$$

1. Montrer que J est bijective et trouver l'ensemble de ses points fixes.
2. Montrer que J est de classe C^1 et calculer sa différentielle.
3. Montrer que pour tout x, dJ_x est un multiple d'une application orthogonale. (On dit que J est une application *conforme*).

Exercice 12. Fonctions homogènes
Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ de classe C^1 et homogène de degré k, c'est-à-dire :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall t > 0, f(tx) = t^k f(x).$$

1. Calculer $df_x(x)$.
2. Montrer que $df : \mathbb{R}^n \to L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ est homogène de degré $k-1$.

Exercice 13.

Donner un exemple de fonction $f \in C^1(\Omega)$, avec Ω ouvert connexe, qu'il existe $a, b \in \Omega$ telle que :

$$\|f(a) - f(b)\| > \|a - b\| \sup_{x \in \Omega} \|df_x\|$$

Exercice 14. Point de Fermat

Soit ABC un triangle du plan affine euclidien $\mathcal{E}$ dont la mesure de chaque angle est $< \frac{2\pi}{3}$. On définit l'application :

$$f : \begin{cases} \mathcal{E} \to \mathbb{R} \\ M \mapsto AM + BM + CM \end{cases}$$

1. Déterminer le domaine de différentiabilité de f et calculer sa différentielle.
2. Montrer que f admet un minimum à l'intérieur du triangle.
3. Montrer qu'il est unique.
4. Que se passe-t-il si un des angles est de mesure supérieure à $\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 15. Racine de matrices

Soit $S_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques de taille n et U l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

1. Montrer que U est un ouvert de S.
2. Montrer que pour tout $A \in U$, il existe un unique $B \in U$ tel que $B^2 = A$. On note $B = \sqrt{A}$.
3. Montrer que $A \mapsto \sqrt{A}$ est différentiable sur U.