Exercice 7.

Soit $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de compacts connexes d'un espace métrique (X,d). Posons $K=\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$. Supposons, par l'absurde, que K n'est pas connexe. Il existe alors deux fermés non vides A et B de K tels que $K = A\sqcup B$. On peut écrire $A = F\cap K$ et $B = G\cap K$ où F et G sont des fermés de X. Pour utiliser la connexité des K_n, nous voulons avoir $K_n \subset F\cup G$. Posons donc $F' = \{x\in X : d(x,F)\leq d(x,G)\}$ et $G' = \{x\in X : d(x,G)\leq d(x,F)\}$. Comme la fonction distance à un ensemble est continue, F' et G' sont des fermés de X. On a aussi $F'\cup G' = X$.

Montrons dans un premier temps que $F'\cap K = A$ et que $G'\cap K = B$. Soit $x\in F'\cap K$. Si $x\notin A$, alors $x\in B\subset G$ d'où $d(x,G)=0$, mais on a aussi $x\notin F$ donc $d(x,F)>0$ car F est fermé, donc $d(x,F)>0=d(x,G)$, ce qui contredit $x\in F'$. Donc $x\in A$. Réciproquement, si $x\in A$, alors $x\in F\subset F'$ et $x\in K$ donc $x\in F'\cap K$. On a montré $F'\cap K = A$. La symétrie des rôles entre A et B donne $G'\cap K = B$.

Soit $n\in\mathbb{N}$. On a $K_n = (F'\cap K_n)\cup(G'\cap K_n)$ où $F'\cap K_n$ et $G'\cap K_n$ sont des fermés de K_n. Ils sont non vides car $F'\cap K_n\supset F'\cap K = A\neq\emptyset$ (de même pour $G'\cap K_n$). Comme K_n est connexe, cette réunion ne peut pas être disjointe. Considérons donc $x_n\in F'\cap G'\cap K_n$.

Pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a $x_n\in K_n\subset K_0$ et K_0 est compact. Considérons donc une extraction φ et $x\in K_0$ tels que $x_{\varphi(n)}\to x$. Comme F' et G' sont fermés, on a $x\in F\cap G$. Soit $p\in\mathbb{N}$. Il existe n_0 tel que $\varphi(n)\geq p$ pour tout $n\geq n_0$. On a donc $x_{\varphi(n)}\in K_{\varphi(n)}\subset K_p$ pour tout $n\geq n_0$. Comme K_p est compact donc fermé, on a $x\in K_p$. Ceci étant vrai pour tout $p\in\mathbb{N}$, on a $x\in K$. On a donc trouvé un élément $x\in F'\cap G'\cap K$, donc $x\in A\cap B=\emptyset$, ce qui est absurde. Donc K est connexe.

Remarquons que l'énoncé n'est pas vrai si l'on remplace connexe par connexe par arcs. En effet, si l'on considère $\Gamma = \left\{\left(x,\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right), x\in]0,1]\right\}$, nous avons vu lors du TD3 que $\overline{\Gamma}$ n'est pas connexe par arcs. Or, si $K_n = \Gamma\cup[0,\dfrac{1}{n}]\times[-1,1]$, on trouve que $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de compacts connexes par arcs, mais $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \overline{\Gamma}$ n'est pas connexe par arcs.