Exercice 1. Les ensembles suivants sont-ils compacts ?

1. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$
2. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = (x-1)(x+1)\}$
3. $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x(1-x)\}$

Exercice 2.

1. Soit X un espace muni de la topologie discrète. Quelles sont ses parties compactes ? Quelles sont ses parties fermées et bornées ?
2. Soit (X,d) un espace métrique. Montrer que si X est compact alors pour tout $x_0 \in X$, il existe $r > 0$ tel que $X = B(x_0, r) = \overline{B(x_0, r)}$. La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 3. Soit (X,d) un espace métrique.

1. Soient A, B deux parties compactes. Montrer que $A \cup B$ est compact.
2. Soient K et F des parties disjointes. On suppose que K est compacte et F fermée. Montrer que $d(K,F) > 0$. Est-ce encore vrai si K est seulement supposée fermée ?

Exercice 4. Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie.

1. Montrer que les compacts sont exactement les fermés bornés. Est-ce vrai en dimension infinie ?
2. Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Montrer que pour tout $a \in E$, $d(a,F)$ est atteinte.
3. Soient K un compact et F un fermé montrer que $K + F$ est fermée. Est-ce encore vrai si K est seulement supposée fermée ? Est-ce vrai en dimension infinie ?

Exercice 5. Montrer qu'un produit dénombrable d'espaces métriques compacts est compact.

Exercice 6. Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres réels positifs et K_α le sous-ensemble de $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ défini par $K_\alpha = \{(u_n)_{n\geq 0} \in \ell^2 : |u_n| \leq \alpha_n\}$. Montrer que K_α est compact si et seulement si α appartient à $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$. Montrer qu'une suite de K_α converge si et seulement si toutes ses projections convergent.

Exercice 7. Montrer qu'une intersection décroissante de parties compactes et connexes est connexe. Est-il vrai qu'une intersection décroissante de fermés connexes est connexe ?

Exercice 8. Soit (X,d) un espace métrique compact et $f : X \to X$ une application.

1. Si f vérifie $d(f(x), f(y)) < d(x,y)$ dès que x et y sont des points distincts de X, montrer que f admet un unique point fixe dans X.

2. Si f préserve la distance ($d(f(x), f(y)) = d(x, y)$) montrer que f est bijective. *Indication : montrer que si x est un point de X et $f^{n(k)}(x)$ a une limite, alors $f^{n(k+1)-n(k)}(x)$ converge vers x.*
3. Si f est continue et vérifie $d(f(x), f(y)) \geq d(x, y)$ alors f est bijective et on a $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

Exercice 9. L'espace de Cantor.

1. Montrer que l'application $d_\alpha(\omega_1, \omega_2) = \alpha^{-min\{k\in\mathbb{N}|\omega_1(k)\neq\omega_2(k)\}}$, pour $\alpha > 1$ définit une distance sur $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Comparer la topologie ainsi définie à celle donnée par la norme $d(\omega_1, \omega_2) = \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k}|\omega_1(k) - \omega_2(k)|$.
2. Montrer que $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d_\alpha)$ est compact.
3. Montrer que si $\alpha > 1$ et $\beta > 1$ alors d_α et d_β définissent la même topologie sur $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Les espaces $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d_\alpha)$ et $(\{0, 1\}^{\mathbb{N}}, d_\beta)$ sont-ils isométriques ?
4. Montrer que l'espace de Cantor est homéomorphe à $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Exercice 10. Espaces de fonction.

1. Soit E un espace de fonctions de classe C^1 de $[0; 1]$ dans $\mathbb{R}$ tel que $||f'||_\infty \leq ||f||_\infty$ pour tout $f \in E$. Montrer que E est de dimension finie.
2. Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact. Montrer que l'ensemble des isométries $\mathrm{Isom}(K, K)$ muni de la distance uniforme, est un compact.

Exercice 11. Soit (K, d) un espace métrique compact.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ montrer qu'il existe une partie finie F de K telle que :
$$\forall x \in K,\ \exists y \in F,\ d(x, y) < 1/k.$$
2. À l'aide de ce qui précède, montrer que K est séparable. On notera désormais $D = \{y_n, n \in \mathbb{N}\}$ une partie dénombrable dense.
3. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que $\forall(x, y) \in K^2$, $d(x, y) \leq \delta$.

On pose :
$$\phi : \begin{pmatrix} K & \to & [0, \delta]^{\mathbb{N}} \\ x & \mapsto & (d(x, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \end{pmatrix}.$$

4. Montrer que ϕ est injective.
5. On munit $[0, \delta]^{\mathbb{N}}$ de la topologie produit. Rappeler pourquoi cet espace est compact et montrer que l'application ϕ est continue.
6. Montrer que tout espace métrique compact est homéomorphe à une partie fermée de $[0, 1]^{\mathbb{N}}$.

Exercice 12. Pas de théorème de Cantor-Bernstein topologique
Soit $X = \cup_{n=0}^{\infty}(]3n, 3n + 1[\cup \{3n + 2\})$ et $Y = (X - \{2\}) \cup \{1\}$. D'une part, montrer que X et Y ne sont pas homéomorphes. D'autre part, trouver deux bijections continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$. Conclure.