
Exercice 1 1. Soit l une valeur d'adhérence de (x_n). Pour tout voisinage V de l, il existe une infinité de termes (x_n) dans V, donc V intersecte $\{x_n | n \geq k\}$ pour tout k ; c'est-à-dire, $l \in \overline{F_k}$ pour tout k. Réciproquement, si $l \in \overline{F_k}$ pour tout k, tout voisinage de l contient un x_n pour $n \geq k$ pour chaque k. Cela donne une infinité de points de la suite (x_n) dans ce voisinage.

2. Si $diam(F_k)$ converge vers 0, pour tout $\epsilon > 0$, il existe N tel que $\forall k \geq N$, $diam(F_k) < \epsilon$. Donc pour tout $p, q \geq N$, $d(x_p, x_q) < \epsilon$ et (x_n) est de Cauchy. Réciproquement, si (x_n) est de Cauchy, il existe $N > 0$ tel que $\forall p, q \geq N$, $d(x_p, x_q) < \epsilon$. Donc pour tout $k \geq N$, $diam(F_k) = \sup_{p,q \geq k} d(x_p, x_q) \leq \epsilon$.

3. Si X est complet, soit F_n une telle suite de fermés. Quitte à prendre une sous-suite $F_{\phi(n)}$, on peut supposer que $diam(F_n) < 2^{-n}$. On choisit alors un point x_n dans chaque F_n et pour tout $p, q \geq n$, $d(x_p, x_q) < 2^{-n}$, on a donc construit une suite de Cauchy (x_n) qui converge dans X car X est complet. Comme chaque F_n est fermé, la limite est dans chaque F_n.

   Réciproquement, si (x_n) est de Cauchy, la suite F_k de la première question est une suite de fermés emboités dont le diamètre tend vers zéro. Son intersection est donc non vide. Si cette intersection contient deux points, x et y, $d(x, y) \leq diam(F_k)$ pour tout k, donc $x = y$ et la suite (x_n) converge.

Exercice 2 1. Le point clé est que si f est lipschitzienne et (x_n) est une suite de Cauchy, alors $f(x_n)$ est aussi de Cauchy. Avec ceci, supposons X complet et prenons (x_n) est de Cauchy dans Y. Alors $g(x_n)$ est de Cauchy dans X donc converge, et $f(g(x_n)) = x_n$ converge également.

2. On vérifie les axiomes d'une distance.

3. Par continuité de arctan.

4. Par continuité de tan.

5. La suite $x_n = \tan(\frac{\pi}{2} - \frac{1}{n})$ est de Cauchy pour d car $d(x_p, x_q) = |\frac{1}{p} - \frac{1}{q}|$. Pourtant cette suite tend vers $+\infty$!

6. Les espaces $(\mathbb{R}, ||)$ et $(\mathbb{R}, d)$ ne sont pas métriquement équivalents. Remarquez que l'on peut le déduire aussi du fait que d est bornée alors que $||$ est non bornée.

7. $x \mapsto x^3$ est un homéomorphisme de $\mathbb{R}$, c'est une isométrie de $(\mathbb{R}, d)$ dans $(\mathbb{R}, ||)$, et la complétude est préservée par isométrie. $\exp : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ est un homéomorphisme et une isométrie de $(\mathbb{R}, d)$ dans $(]0, +\infty[, ||)$ qui n'est pas complet (car non fermé dans $\mathbb{R}$). Pour le dernier, il faut d'abord vérifier que c'est une distance, seule l'inégalité triangulaire n'est pas immédiate, il faut l'ingrédient suivant :

$$\ln(1 + u + v) \leq \ln(1 + u + v + uv) \leq \ln((1 + u)(1 + v)) \leq \ln(1 + u) + \ln(1 + v)$$

Comme $\ln(1+u) = u + o(u)$ au voisinage de 0, on a sur un intervalle assez petit $[0, \eta]$,

$$\frac{u}{2} \leq \ln(1+u) \leq u$$

Ainsi d et $||$ ont les mêmes suites de Cauchy et induisent la même topologie : $(\mathbb{R}, d)$ est complet.

Exercice 3

Exercice 4 1. D'après le cours, dans un espace complet, l'adhérence d'une partie est sa complétion. Donc $[0,1]$ est le complété de $]0,1[$.

2. $(\mathbb{R}, d)$ est isométrique à $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, donc son complété est $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
3. Comme $\mathbb{R}$ est complet, une partie de $\mathbb{R}$ est fermée si et seulement si elle est complète. Comme $\mathbb{Q}$ n'est pas fermé, il n'est pas complet. Son complété est son adhérence : $\mathbb{R}$.
4. L'espace $C^0([0,1], \mathbb{R})$ est complet et $\mathbb{R}[X]$ y est dense, donc son complété est $C^0([0,1], \mathbb{R})$.
5. $C^1([0,1], \mathbb{R})$ est dense dans $C^0([0,1], \mathbb{R})$, son complété est $C^0([0,1], \mathbb{R})$. Pour la norme $||$, montrons qu'il est complet : soit (f_n) une suite de Cauchy, par l'inégalité des accroissements finis, on a :

$$|f(x)| \leq |f(0)| + \sup |f'(x)|$$

Donc $\|f\|_\infty \leq 2\|f\|$. Ainsi, (f_n) et (f'_n) sont de Cauchy dans C^0, donc converge respectivement vers f et g dans C^0. Par le théorème de dérivation des suites de fonctions, f est dérivable de dérivée égale à g, et on vérifie que (f_n) converge vers f dans $(C^1, \|\|)$. On peut en déduire que $\|\|$ et $\|\|_\infty$ ne sont pas métriquement équivalentes sur l'espace C^1.

Exercice 5 1. Soit (u^n) une suite de Cauchy d'éléments de ℓ^∞. Pour chaque $k \in \mathbb{N}$ la suite de réels $(x_k^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(\mathbb{R}, ||)$(par exemple en tant qu'image d'une suite de Cauchy par une application lipschitzienne), elle converge donc vers un réel x_k. On note x la suite associée. Soit $\varepsilon > 0$ et $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tous $p, q \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \mathbb{N}$ $|u_k^p - u_k^q| \leq d(u^p, u^q) < \varepsilon$. On montre par passage à la limite quand $k \to \infty$ dans cette inégalité que $x \in \ell^\infty$ et que (u^n) tend vers x.

2. On vérifie sans problème que c_0 est fermé dans ℓ^∞. Une partie fermée d'un espace complet est complète.
3. c_{00} n'est pas fermé donc pas complet dans ℓ^∞. En effet, la suite (u^n) d'éléments de c_{00} définie par $u_k^n = \frac{1}{k+1}\delta_{k \leq n}$ converge vers la suite $(\frac{1}{k+1})_k$, qui n'est pas dans c_{00}. Comme c_{00} est dense dans c_0 qui est complet (en effet, toute suite $(x_k)_k$ de c_0 est limite de $((x_k \delta_{k \leq n})_k)^n \in c_{00}$), et que l'inclusion est une isométrie, on en déduit que c_0 est le complété de c_{00}.

4. La norme $N(\sum_{k=0}^{n} a_k X^k) = \sup_{0\leq k\leq n} |a_k|$ rend isométrique l'application de c_{00} dans $\mathbb{R}[X]$ $i : (u_k)_k \mapsto \sum_{k=0}^{n} u_k X^k$.
   Elle n'est pas métriquement équivalente à la norme N_∞ de l'exercice 4 car par exemple la suite de polynômes $((X-\frac{1}{2})^n)_n$ tend vers 0 pour N_∞ mais ses termes sont de norme N supérieure à 1.
   La suite de polynômes $(\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} X^k)_n$ a ses termes de norme N_∞ supérieure à 1 mais converge vers 0 pour N.
   On peut néanmoins vérifier que ces deux normes engendrent la même topologie sur $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 6

1. Comme la fonction exponentielle est strictement positive on peut vérifier facilement que $||\cdot||$ est bien une norme.
   Pour tout f dans E on a $e^{-M}||f||_\infty \leq ||f|| \leq ||f||_\infty$, et $(E, ||\cdot||_\infty)$ est complet, donc $(E, ||\cdot||)$ est complet.
2. Soit $f_1, f_2 \in E$, on pose $g_1 = T(f_1)$ et $g_2 = T(f_2)$. On a
$$g_1(x) - g_2(x) = a\int_0^x |f_1(t^b) - f_2(t^b)|dt,$$
   et
$$|g_1(x) - g_2(x)| \leq a\int_0^x |f_1(t^b) - f_2(t^b)|e^{-Mt^b}e^{Mt^b}dt \leq a||f_1 - f_2||\int_0^x e^{Mt^b}dt$$
$$\leq a||f_1 - f_2||\int_0^x e^{Mt}dt \leq \frac{a}{M}||f_1 - f_2||e^{Mx};$$
   d'où $||T(f_1) - T(f_2)|| \leq \frac{a}{M}||f_1 - f_2||$, et $M = 2a$ convient.
3. En fixant la valeur de M obtenue précédemment, E est muni d'une norme pour laquelle il est complet et l'opérateur T est $\frac{1}{2}$-contractant. On peut utiliser le théorème du point fixe pour en déduire que T admet un unique point fixe sur E. Or l'ensemble des points fixes de T correspond exactement à l'ensemble des solutions de (*) sur E.
4. La fonction nulle est solution, par unicité c'est donc la seule.
5. Par intégration successives, on peut calculer l'image de la fonction $x \mapsto x$ par T^{10} :
$$T^{10}(x) = 1 + x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{21} + \frac{x^{15}}{315} + \frac{x^{31}}{9765} + \frac{x^{63}}{615195}$$
$$+\frac{x^{127}}{78129765} + \frac{x^{255}}{39924309915} + \frac{x^{511}}{81725062396005} + \frac{x^{2047}}{167291202724622240}.$$
   Comme T est $\frac{1}{2}$-contractante et que s est un point fixe de T on en déduit que
$$||T^{10}(x) - s|| = ||T^{10}(x) - T^{10}(s)|| \leq \frac{1}{2^{10}}||x - s|| \leq \frac{||x - s||}{1000}.$$

Exercice 7 1. Par une identité remarquable on a $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}0$.
Elle n'est pas de Cauchy car si $q<p$ alors $\sqrt{p}-\sqrt{q}=\frac{p+q}{\sqrt{p}+\sqrt{q}}>\sqrt{q}$. D'ailleurs elle ne converge pas.

2. Par l'inégalité triangulaire on a $d(x_{n+p},x_n)\leq\sum_{k=0}^{p-1}d(x_{n+k+1},x_{n+k})\leq\sum_{k=0}^{p-1}\frac{1}{2^{n+k}}\leq\frac{1}{2^{n-1}}$ et donc $d(x_{n+p},x_n)$ est petit dès que n est assez grand, et la suite est de Cauchy.
3. Soit n_k une suite d'entiers, choisie strictement croissante, et correspondant aux bornes de Cauchy pour $\varepsilon=\frac{1}{2^k}$. Alors (x_{n_k}) est une suite extraite et elle vérifie (*).
4. D'après les questions précedentes il suffit de montrer que toute suite de Cauchy qui admet une sous-suite convergente est convergente.
5. On suppose que (E,N) est complet, alors si $\sum x_n$ est absolument convergente la suite $(\sum_{k=0}^{n}|x_k|)_n$ est convergente donc de Cauchy. On en déduit aisément par l'inégalité triangulaire que la suite $(\sum_{k=0}^{n}x_k)_n$ est de Cauchy, donc elle converge.
Réciproquement, on suppose que toute série d'éléments de (E,N) absolument convergente est convergente. Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy, d'après la question 3) elle admet une sous-suite $(x_{n_k})_k$ satisfaisant (*). Comme la série $\sum\frac{1}{2^n}$ converge on en déduit que la série de terme général $(N(x_{n_{k+1}}-x_{n_k}))_k$ converge. La série $\sum x_{n_{k+1}}-x_{n_k}$ est absolument convergente, donc convergente, ce qui implique que la suite $(x_{n_k})_k$ converge. $(x_n)_n$ est de Cauchy et admet une sous-suite convergente, donc elle converge.

Exercice 8 1. L'ensemble des points où deux fonctions continues coïncident est un fermé, s'il contient une partie dense, c'est l'espace tout entier.

2. L'image d'une suite de Cauchy par une fonction uniformément continue est de Cauchy. Si f est uniformément continue : pour tout $\epsilon>0$ il existe η tel que si $d(x,y)<\eta$, alors $d(f(x),f(y))<\epsilon$. Si (x_n) est de Cauchy, il existe N tel que pour tout $p,q\geq N$, $d(x_p,x_q)<\eta$ et donc $d(f(x_p),f(x_q))<\epsilon$. Comme Y est complet $f(x_n)$ converge.
3. Ces suites $f(x_n)$ sont de Cauchy dans Y, donc convergent. Si (x'_n) est une autre suite de A convergent vers x, alors par continuité uniforme de f, on a $d(f(x_n),f(x'_n))\to 0$, donc $f(x_n)$ et $f(x'_n)$ ont la même limite.
4. On peut prolonger f en posant $f(x)=g(x)$ si $x\in X\setminus A$. Par le critère séquentiel de continuité, f est continue aux points de $X\setminus A$.
5. Sur $\mathcal{E}$, on définit la forme linéaire I qui calcule l'intégrale d'une fonction en escalier. I est lipschitzienne : $|I(f)-I(g)|\leq\|f-g\|_\infty$. D'après les questions précédentes, I se prolonge à $\overline{\mathcal{E}}$. Comme I est linéaire sur $\mathcal{E}$ qui est dense, le prolongement est également linéaire. Par le théorème de Heine, une fonction continue f est uniformément continue. Soit $\epsilon>0$ et n assez grand tel que si $|x-y|<\frac{1}{n}$, alors $|f(x)-f(y)|<\epsilon$. La fonction constante sur chaque intervalle $[\frac{k}{n},\frac{k+1}{n}]$ égale à $f(\frac{k}{n})$ est en escalier, et

se trouve à distance $< \epsilon$ de f. Donc $\overline{\mathcal{E}}$ contient les fonctions continues. On a défini l'intégrale de Riemann des fonctions continues.

Exercice 9 La fonction $f : x \mapsto 0$ si $x \leq \sqrt{2}$ et 1 sinon est continue sur $\mathbb{Q}$. En effet si $x < \sqrt{2}$ alors $]x-12, x+\frac{\sqrt{2}-x}{2}[\bigcap \mathbb{Q}$ est un voisinage de x dans $\mathbb{Q}$ sur lequel f est constante donc continue. De même si $x > \sqrt{2}$ alors $]x - \frac{\sqrt{2}-x}{2}, x+12[\bigcap \mathbb{Q}$ est un voisinage de x dans $\mathbb{Q}$ sur lequel f est constante donc continue. Ainsi f est continue sur $\mathbb{Q}$.

Tout prolongement de f à $\mathbb{R}$ par continuité vaudra 0 sur $]-\infty; \sqrt{2}[$ et 1 sur $]\sqrt{2}; +\infty[$ et ne peut donc être continu en $\sqrt{2}$.

On peut remarquer que f n'est pas uniformément continue car pour tout $\eta > 0$ il existe $q, p \in \mathbb{Q}$ avec $q < \sqrt{2}$, $\sqrt{2} < p$ et $p - q < \eta$. On a donc $f(p) - f(q) = 1$.