ENS de Lyon **TD 4 - Complétude** **27/09/2012**
Topologie

Exercice 1. Propriété des fermés emboités Soit (X, d) un espace métrique.

1. Soit $(x_n)_{n\geq 1}$ une suite de X. Soit $F_k = \overline{\{x_n | n \geq k\}}$. Montrer que $\cap_{k\geq 1} F_k$ est l'ensemble des valeurs d'adhérence de (x_n).
2. Montrer que le diamètre de (F_k) tend vers 0 si et seulement si (x_n) est de Cauchy.
3. Montrer l'équivalence entre :
   a) (X, d) est complet.
   b) Toute suite décroissante de fermés non vides F_n dont le diamètre tend vers zéro a une intersection non-vide.

Exercice 2. Distances et complétude.

Soient (X, d) et (Y, d') deux espaces métriques. On dit que X et Y sont topologiquement équivalents s'il existe $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ continues et réciproques l'une de l'autre. On dit que (X, d) et (Y, d') sont métriquement équivalents si en plus f et g sont lipschitziennes.

1. Montrer que si (X, d) et (Y, d') sont métriquement équivalents alors (X, d) est complet ssi (Y, d') l'est.
2. Soit $d(x, y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$, pour $x, y \in \mathbb{R}$. Montrer que d définit une distance sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $id : (\mathbb{R}, |\ |) \to (\mathbb{R}, d)$ est continue.
4. Montrer que $id : (\mathbb{R}, d) \to (\mathbb{R}, |\ |)$ est continue.
5. Étudier la complétude de $(\mathbb{R}, d)$.
6. Conclure.
7. Pour chacune de ces distances, dire si $\mathbb{R}$ est complet : $d(x, y) = |x^3 - y^3|$, $d(x, y) = |\exp(x) - \exp(y)|$, et $d(x, y) = \ln(1 + |x - y|)$.

Exercice 3. Soit E l'ensemble des applications f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ telles que $|f(z)| \leq \frac{1}{1+|z|}$, $(\forall z \in \mathbb{C})$.

1. On définit $d(f, g) = \sup\{|f(z) - g(z)|, z \in \mathbb{C}\}$. Montrez que d est une distance sur E. Montrez que (E, d) est complet.
2. On définit $d'(f, g) = \sup\{(1 + |z|)|f(z) - g(z)|, z \in \mathbb{C}\}$. Montrez que d' est une distance sur E. Montrez que (E, d') est complet.
3. Ces deux distances sont-elles topologiquement équivalentes ?

Exercice 4.

1. Montrer que $]0, 1[$ muni de la valeur absolue n'est pas complet. Quel est son complété ?

2. Quel est le complété de $\mathbb{R}$ muni de la distance $d(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$?
3. Montrer que $\mathbb{Q}$ muni de la valeur absolue n'est pas complet. Quel est son complété ?
4. Montrer que $\mathbb{R}[X]$ muni de la norme $N(P) = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$ n'est pas complet. Quel est son complété ?
5. Montrer que $C^1([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme sup n'est pas complet. Quel est son complété ? Montrer qu'il l'est pour la norme $||f|| = \max(\sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|, f(0))$. Qu'en déduisez-vous ?

Exercice 5. Soit ℓ^∞ le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des suites bornées muni de la distance uniforme.

1. Montrer que (ℓ^∞, d) est complet.
2. Soit c_0 le sous-espace formé des suites qui convergent vers 0. Montrer que c_0 est complet.
3. Soit c_{00} le sous-espace de ℓ^∞ formé des suites qui n'ont qu'un nombre fini de termes non-nuls. Est-il complet ? Quel est son complété ?
4. c_{00} est isomorphe (par définition) à l'espace vectoriel $\mathbb{R}[X]$. Donner une distance sur $\mathbb{R}[X]$ qui transforme l'isomorphisme précédent en une isométrie. Etudier l'équivalence métrique entre cette distance et celle de l'exercice précédent.

Exercice 6. Théorème du point fixe.

On considère l'équation fonctionnelle $f(0) = \alpha,\ \ f'(x) = af(x^b)$, où $\alpha \in \mathbb{R},\ a > 0,\ b > 1,\ 0 \leq x \leq 1.$ (*)

1. Soit $M > 0$; montrer que $E = C([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $||f|| = \sup_{0\leq x\leq 1} |f(x)|e^{-Mx}$ est un espace de Banach.
2. Soit $T : E \to E$ définie par $T(f) = g$, où $g(x) = \alpha + \int_0^x af(t^b)dt$; montrer qu'on peut ajuster M pour que T soit $\frac{1}{2}$-contractante.
3. Montrer que (*) admet une unique solution dans E.
4. Résoudre (*) pour $\alpha = 0$, $a = 1$ et $b = 2$.
5. Pour $\alpha = 1$, $a = 1$ et $b = 2$, expliciter une suite de fonctions qui converge vers la solution s de (*), ainsi qu'une fonction approchant s mieux que $\frac{||x-s||}{1000}$.

Exercice 7. Complétude et séries.

1. Montrer que $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ tend vers 0 quand $n \to \infty$. La suite $\sqrt{n}$ est-elle de Cauchy ?
2. Soit (X,d) un espace métrique. Montrez que si $(x_n) \in X^{\mathbb{N}}$ vérifie $\forall n\ d(x_n, x_{n+1}) < \frac{1}{2^n}$ $(*)$ alors elle est de Cauchy.
3. Réciproquement montrez que si (x_n) est de Cauchy alors elle admet une sous-suite satisfaisant (*).

4. Montrez que (X, d) est complet ssi toute suite satisfaisant (*) converge.
5. Soit (E, N) un espace vectoriel normé. Montrez que (E, N) est complet ssi toute série absolument convergente d'éléments de E est convergente dans E.

Exercice 8. Théorème de prolongement des applications uniformément continues.

Soit A une partie dense d'un espace métrique X, et Y un espace métrique complet. Soit $f : A \to Y$ uniformément continue. On cherche à prolonger f en une application uniformément continue sur X.

1. Montrer qu'il existe au plus une façon de prolonger f sur X.
2. Montrer que l'image par f d'une suite de Cauchy de A est une suite convergente dans Y.
3. Soit $x \in X$, montrer que les images par f de suites de A qui convergent vers x convergent vers la même limite notée $g(x)$.
4. Conclure.
5. Application : On se place dans l'ensemble des fonctions réelles bornées de $[0, 1]$ muni de la norme sup. On note $\mathcal{E}$ le sous-espace vectoriel des fonctions en escalier. Montrer l'existence d'une forme linéaire sur $\overline{\mathcal{E}}$ qui vaut $b - a$ pour chaque fonction $1_{[a,b]}$. Montrer que $\overline{\mathcal{E}}$ contient les fonctions continues.

Exercice 9. Le théorème de prolongement demande de la continuité uniforme. Donner un exemple de fonction continue de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$ qui n'admet pas de prolongement continu à $\mathbb{R}$.

Exercice 10. Montrer que l'espace $C^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $N_p(f) = (\int_0^1 |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}}$ n'est pas complet. Que pensez-vous de son complété ?