ENS Lyon **TD 3 - correction** **13/09/2012**
Topologie

Exercice 1 1. Soit $A \subset \mathbb{C}$ un ensemble fini ou dénombrable. Soit $(x,y) \in (\mathbb{C} \setminus A)^2$ avec $x \neq y$. Soit D la médiatrice du segment $[x,y]$. Pour $a \in D$, on pose le chemin $\gamma_a : [0,1] \to \mathbb{C}$ défini par $\gamma_a(t) = (1-2t)x + 2ta$ si $t \in [0, \frac{1}{2}]$ et $\gamma_a(t) = (2t-1)y + 2(1-t)a$ si $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. On vérifie que γ_a est continu et qui si $a \neq b$ alors $\gamma_a([0,1]) \cap \gamma_b([0,1]) = \{x,y\}$. Ainsi, par l'absurde, si pour tout $a \in D$ il existe $z_a \in A \cap \gamma_a([0,1])$, alors on peut définir une injection $a \mapsto z_a$ de D dans A, ce qui est absurde car D est indénombrable.

2. Soit $x \in X$ et C_x sa composante connexe. On veut montrer que $h(C_x) = C_{h(x)}$. Comme h est continue, $h(C_x)$ est un connexe qui contient $h(x)$, d'où $h(C_x) \subset C_{h(x)}$. En appliquant ceci à h^{-1}, on trouve $h^{-1}(C_{h(x)}) \subset C_x$ et $C_h(x) = (h \circ h^{-1})(C_h(x)) = h(h^{-1}(C_{h(x)})) \subset h(C_x)$, ce qui donne bien l'égalité $h(C_x) = C_{h(x)}$.

Exercice 2 Par l'absurde, supposons qu'il existe un homéomorphisme $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Pour $n \geq 2$, $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ est connexe, donc $h(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ est connexe, or $h(\mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \mathbb{R} \setminus \{h(0)\}$ (car h est bijective) qui n'est pas connexe, ce qui est absurde.

Exercice 3 1. Montrons que les composantes connexes de $\mathbb{Q}$ sont les singletons. Soit $E \subset \mathbb{Q}$ un ensemble contenant au moins deux points. Fixons $x, y \in E$ tels que $x < y$. Par densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, on peut choisir $z \in]x, y[$ tel que $z \notin \mathbb{Q}$. On pose $A = E \cap]-\infty, z[$ et $B = E \cap]z, +\infty[$. Les ensembles A et B sont ouverts dans E (comme intersections de E et d'ouverts de $\mathbb{R}$), et on a $E = A \sqcup B$ car $z \notin \mathbb{Q}$, ce qui montre que E n'est pas connexe. Ainsi toute partie de $\mathbb{Q}$ contenant au moins deux éléments n'est pas connexe, donc les composantes connexes sont les singletons.

2. Montrons ici aussi que les composantes connexes sont les singletons. Soit $E \subset \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ un ensemble contenant au moins deux éléments. Fixons $x, y \in E$ tels que $x \neq y$, et écrivons $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $y = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Comme $x \neq y$, choisissons $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} = y_{n_0}$ et définissons $f : E \to \{0,1\}$ par $f((z_n)_{n \in \mathbb{N}}) = z_{n_0}$. C'est une application continue (car 2^{n_0}-lipschitzienne) et non constante car $f(x) \neq f(y)$. Ceci montre que E n'est pas connexe, donc les composantes connexes sont les singletons.

Exercice 4 Dans un premier temps, montrons que $\overline{\Gamma} = \Gamma \cup \{0\} \times [-1,1]$.

Soit $(x,y) \in \overline{\Gamma}$. On écrit $(x,y) = \lim(x_n, \sin(1/x_n))$. Comme $x_n \in]0,1]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $x \in [0,1]$. Si $x = 0$ alors $y = \lim \sin(1/x_n) \in [-1,1]$ et $(x,y) \in \{0\} \times [-1,1]$. Si $x \neq 0$ alors $\sin(1/x_n) \to \sin(1/x)$ par continuité et $y = \sin(1/x)$ par unicité de la limite, d'où $(x,y) \in \Gamma$. On a montré $\overline{\Gamma} \subset \Gamma \cup \{0\} \times [-1,1]$.

On a toujours $\Gamma \subset \overline{\Gamma}$. Soit $y \in [-1,1]$. On a bien $(0,y) = \lim(x_n, \sin(1/x_n))$ avec $x_n = \dfrac{1}{2n\pi + \arcsin(y)}$, d'où $(0,y) \in \overline{\Gamma}$, ce qui montre $\overline{\Gamma} \supset \Gamma \cup \{0\} \times [-1,1]$.

Comme Γ est l'image continue du connexe $]0,1]$ par $t \mapsto (t, \sin(1/t))$, on en déduit que Γ est connexe, par conséquent son adhérence $\overline{\Gamma}$ est connexe.

Par l'absurde, supposons qu'il existe un chemin continu $\gamma : [0,1] \to \overline{\Gamma}$ vérifiant $\gamma(0) = (0,0)$ et $\gamma(1) = (1, \sin(1))$. Posons $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. On définit $t_0 = \sup\{t \in [0,1], x(t) = 0\}$. Par continuité de x, on a $x(t_0) = 0$. Posons $y = y(t_0)$. Considérons les suite $u_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$ et $v_n = \dfrac{1}{-\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$. Par le Théorème des valeurs intermédiaires, il existe des suites (a_n) et (b_n) dans $]t_0, 1]$ telles que $x(a_n) = u_n$ et $x(b_n) = v_n$. Comme $[t_0, 1]$ est compact, considérons une extraction φ et $a, b \in [t_0, 1]$ tels que $a_{\varphi(n)} \to a$ et $b_{\varphi(n)} \to b$.

Supposons que $a > t_0$. On a alors $x(a_{\varphi(n)}) \to x(a) > 0$, or $x(a_{\varphi(n)}) = u_{\varphi(n)} \to 0$, ce qui est absurde. Par conséquent, $a = t_0$, et de même $b = t_0$. On a donc $y(a_{\varphi(n)}) \to y(t_0)$, or $y(a_{\varphi(n)}) = \sin(1/u_{\varphi(n)}) = 1$, donc $y(t_0) = 1$. Avec $y(b_{\varphi(n)}) = \sin(1/v_{\varphi(n)}) = -1$ on trouve $y(t_0) = -1$ donc $1 = -1$, ce qui est absurde.

Un tel chemin ne peut donc pas exiter, et $\overline{\Gamma}$ n'est pas connexe par arcs.

Exercice 5

1. Supposons que l'on ait découpé $\cup A_\alpha$ en deux ouverts disjoints U et V. Soit U soit V contient un point de $\cap A_\alpha$, disons U. Alors pour tout α,
$$A_\alpha = (A_\alpha \cap U) \cup (A_\alpha \cap V)$$
est une partition en deux ouverts et $A_\alpha \cap U$ est non vide, donc $V \cap A\alpha = \emptyset$ par connexité de $A\alpha$. Ainsi V est vide, et on a montré que $\cup A_\alpha$ est connexe.
2. Soit $f : A \cup B \to \{0,1\}$ continue. Par connexité de A et B, f est constante sur A et B. Supposons par exemple que $f = 0$ sur A et $f = 1$ sur B. Alors pour $x \in A \cap \overline{B}$, $f(x) = 0$ et $f(x) = \lim f(b_n) = 1$ pour $(b_n) \in B$ convergent vers x, contradiction.

Exercice 6 On écrit pour tout $x \in X$ et $r > 0$,
$$X = \{y | d(x,y) < r\} \sqcup \{y | d(x,y) = r\} \sqcup \{y | d(x,y) > r\}$$
Les parties à droite et à gauche sont ouvertes. Il suffit de montrer qu'elles sont non vides puisqu'alors si la sphère $\{y | d(x,y) = r\}$ était vide, on aurait écrit le connexe X comme l'union de deux ouverts non vides disjoints. Comme X est connexe, aucun point n'est isolé : ce point serait ouvert et fermé. Donc les boules ouvertes ne sont jamais vides. Comme la métrique est non bornée, il existe (y, z) tel que $d(y,z) > 2r$, mais alors $d(y,z) \le d(y,x) + d(x,z)$ et soit $d(y,x) > r$, soit $d(x,z) > r$. En tout cas, $\{y | d(y,z) > r\}$ est non vide.

Exercice 7

Exercice 8 Soit $x \in U$. Soit C_x l'ensemble des $y \in U$ tels qu'il existe un chemin continu reliant x à y dans U (c'est la composante connexe par arcs de x dans U).

Montrons que C_x est ouvert. Soit $y \in C_x$. Fixons un chemin continu γ reliant x à

y dans U. Comme $y \in U$ qui est ouvert, il existe un $r > 0$ tel que la boule $B(y,r)$ est incluse dans U. Soit $z \in B(y,r)$. Définissons $\eta : [0,1] \to E$ par $\eta(t) = \gamma(2t)$ si $t \in [0, \frac{1}{2}]$ et $\eta(t) = (2t-1)z + 2(1-t)y$ si $t \in [\frac{1}{2}, 1]$. On vérifie que η est continu et relie x à z dans U, ainsi $B(y,r) \subset C_x$ et C_x est ouvert.

Remarquons maintenant que l'on a $U = \bigcup_{y \in U} C_y$. Soit $V = \bigcup y \notin C_x C_y$. On a $U = C_x \sqcup V$, et ceux sont deux ouverts, avec $C_x \neq \emptyset$ car $x \in C_x$. Par connexité de U, on en déduit que $V = \emptyset$, ainsi $U = C_x$ et U est connexe par arcs.

Exercice 9 Posons $U = \gamma^{-1}(\mathring{A})$, $V = \gamma^{-1}(X \setminus \overline{A})$ et $W = \gamma^{-1}(\partial A)$. On a $X = \overline{A} \sqcup X \setminus \overline{A}$ et $\overline{A} = \mathring{A} \sqcup \partial A$, d'où $X = \mathring{A} \sqcup \partial A \sqcup X \setminus \overline{A}$, ce qui donne $[0,1] = U \sqcup V \sqcup W$. Or U et V sont ouverts (car images réciproques d'ouverts par γ qui est continu).

Supposons, par l'absurde, que $W = \emptyset$. On a donc $\gamma(0) \in A \setminus \partial A \subset \mathring{A}$, donc $0 \in U$, et $\gamma(1) \in (X \setminus A) \setminus \partial(X \setminus A) \subset X \setminus X \setminus \overline{A}$ (car $\partial(X \setminus A) = \partial A$), et $1 \in V$. On a donc $[0,1] = U \sqcup V$ où U et V sont deux ouverts non vides, ce qui est absurde car $[0,1]$ est connexe. Donc $W \neq \emptyset$.

Exercice 10 Voir DM1

Exercice 11

1. Soit $f : E \times F \to \{0,1\}$ continue. Soient $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in E \times F$. Comme $\{x_1\} \times F$ est homéomorphe à F, cet ensemble est connexe et f est donc constante sur $\{x_1\} \times F$, par conséquent $f((x_1, y_1)) = f((x_1, y_2))$. De même, $E \times \{y_2\}$ est connexe, donc f est constante sur cet ensemble et $f((x_1, y_2)) = f((x_2, y_2))$. On a montré $f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2)$, par conséquent f est constante. Donc $E \times F$ est connexe.
2. Posons $X = (E \times F) \setminus (A \times B)$. Fixons $x_0 \in E \setminus A$ et $y_0 \in F \setminus B$. Soit $f : X \to \{0,1\}$ continue. Soit $(x,y) \in X$. On a $x \notin A$ ou $y \notin B$. Supposons que $x \notin A$. On a donc $\{x\} \times F \subset X$, donc f est définir sur cet ensemble, et constante par connexité de F, par conséquent $f(x,y) = f(x, y_0)$. Comme $y_0 \notin B$, on a $E \times \{y_0\} \subset X$, ce qui permet de montrer, par connexité de E, que $f(x, y_0) = f(x_0, y_0)$, donc $f(x,y) = f(x_0, y_0)$. Le cas $y \notin B$ est similaire, ainsi f est constante, et X est connexe.

Exercice 12 Si X et Y étaient homéomorphes, on sait par l'exercice 1 que chaque composante connexe de Y serait homéomorphe à une composante connexe de X. Or celles de X sont des intervalles ouverts ou des singeletons, donc $]0,1]$ qui est une composante connexe de Y n'est homéomorphe à aucune composante connexe de X. Par conséquent, X et Y ne sont pas homéomorphes.

L'application $f : X \to Y$ définie par $f(x) = x$ si $x \neq 2$ et $f(2) = 1$ est une bijection continue.

Pour construire une bijection continue $g : Y \to X$, on envoie via des applications affines $]0,1]$ sur $]0, \frac{1}{2}]$ et $]3,4[$ sur $]\frac{1}{2}, 1[$, puis, à l'aide d'une translation, on envoie $Y \setminus (]0,1] \cup]3,4[)$ sur $X \setminus]0,1[$.

Exercice 13 On a $\overline{P_+} = \mathbb{R} \times [0,1]$, ce qui montre $\overline{P_+} \cap P_- \neq \emptyset$, donc d'après l'exercice 5, on sait que $P_+ \cup P_-$ est connexe.

Montrons maintenant que $P_+ \cup P_-$ n'est pas connexe par arcs. Supposons, par l'absurde, qu'il existe un chemin continue $\gamma : [0,1] \to P_+ \cup P_-$ reliant $(\sqrt{2}, -1)$ à $(1,1)$. Posons $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t))$ et considérons $t_0 = \gamma_2^{-1}([0,1])$. On montre que $\gamma_2(t_0) = 0$. Par continuité de γ_2, considérons un $\varepsilon > 0$ tel que $-\frac{1}{2} < \gamma_2(t) < \frac{1}{2}$ pour $|t - t_0| < \varepsilon$. Par propriété du sup, il existe $t_1 \in]t_0 - \varepsilon, t_0[$ tel que $\gamma_2(t_1) < 0$, et par conséquent $\gamma_1(t_1) \in \sqrt{2} + \mathbb{Q}$. On a aussi $0 < \gamma_2(t_0 + \frac{\varepsilon}{2}) < \frac{1}{2}$, ce qui donne $\gamma_1(t_0 + \frac{\varepsilon}{2}) \in \mathbb{Q}$. Par le Théorème des Valeurs Intermédiaires, on peut trouver t tel que $-\frac{1}{2} < \gamma_2(t) < \frac{1}{2}$ et $\gamma_1(t) \notin \mathbb{Q} \cup (\frac{1}{2} + \mathbb{Q})$, ainsi $\gamma(t) \notin P_+ \cup P_-$, ce qui est absurde. Donc $P_+ \cup P_-$ n'est pas connexe par arcs.