ENS de Lyon | **TD 3** | **25/09/2011**
Topologie

Exercice 1.

1. Montrer que le complémentaire d'un ensemble fini de points du plan complexe est connexe. Que peut-on dire du complémentaire d'un ensemble dénombrable de points ?
2. Soit h un homéomorphisme de X sur Y. Montrer que h échange les composantes connexes de X et Y.

Exercice 2. Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^n$ ne sont pas homéomorphes si $n \geq 2$.

Exercice 3.

1. Quelles sont les composantes connexes de $\mathbb{Q}$?
2. Quelles sont les composantes connexes de $\left(\{0,1\}^{\mathbb{N}}, d\right)$ où

$$d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n}|x_n - y_n|.$$

Exercice 4. Connexe $\not\Rightarrow$ connexe par arcs
On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$. Montrer que l'adhérence de $\Gamma = \left\{\left(x, \sin\left(\frac{1}{x}\right)\right), x \in]0,1]\right\}$ est connexe, mais n'est pas connexe par arcs.

Exercice 5. Soit X un espace métrique.

1. Soit $(A_\alpha)_{\alpha\in I}$ une famille de parties connexes de X telles que $\bigcap_{\alpha\in I} A_\alpha \neq \emptyset$. Montrer que $\bigcup_{\alpha\in I} A_\alpha \neq \emptyset$ est connexe.
2. Soient A et B deux parties connexes de X. Montrer que si $A \cap \overline{B}$ n'est pas vide, alors $A \cup B$ est connexe.

Exercice 6. Soit (X, d) un espace métrique connexe et non borné. Montrer que toute sphère de X est non-vide.

Exercice 7.

1. Montrer que le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe. *Indication : si A et B sont deux matrices de* $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$*, considérer le polynôme* $P(z) = \det(zA + (1-z)B)$.
2. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe. Décrire ses composantes connexes.
3. Si $M \notin GL_n(\mathbb{R})$, montrer que $GL_n(\mathbb{R}) \cup \{M\}$ est connexe par arcs.

Exercice 8. Soit U un ouvert d'un espace vectoriel normé E. Montrer que U est connexe si et seulement s'il est connexe par arcs.

Exercice 9. Théorème de passage des douanes
Soit (X, d) un espace métrique et $A \subset X$. Soit $\gamma : [0,1] \to X$ un chemin continu tel que $\gamma(0) \in A$ et $\gamma(1) \notin A$. Alors il existe $t \in [0,1]$ tel que $\gamma(t) \in \partial A$.

Exercice 10. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Si F est de codimension au moins 2, montrer que $E \setminus F$ est connexe.
2. Si F est de codimension 1, montrer que $E \setminus F$ a deux composantes connexes.

Exercice 11. Soient (E, d) et (F, d') deux espaces métriques connexes.

1. Montrer que $E \times F$ est connexe.
2. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$ tels que $A \neq E$ et $B \neq F$. Montrer que $(E \times F) \setminus (A \times B)$ est connexe.

Exercice 12. Pas de théorème de Cantor-Bernstein topologique
Soit $X = \cup_{n=0}^{\infty} (]3n, 3n+1[\cup \{3n+2\})$ et $Y = (X - \{2\}) \cup \{1\}$. D'une part, montrer que X et Y ne sont pas homéomorphes. D'autre part, trouver deux bijections continues $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$. Conclure.

Exercice 13. Peigne
On considère les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$

$$P_+ = (\mathbb{R} \times \{1\}) \cup \left(\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x\} \times [0, 1] \right) \text{ et } P_- = (\mathbb{R} \times \{-1\}) \cup \left(\bigcup_{x \in \mathbb{Q}} \{x + \sqrt{2}\} \times [-1, 0] \right).$$

Montrer que $P_+ \cup P_-$ est connexe mais pas connexe par arcs.

Récréation. Classer les lettres de l'alphabet (en majuscule) par classe d'homéomorphisme.