ENS Lyon **TD 2 - correction** **13/09/2012**
Topologie

Exercice 1

Exercice 2

Exercice 3

Exercice 4

Exercice 5 1. On vérifie les axiomes d'une distance.

2. $|x_{n_0} - y_{n_0}| \leq 2^{n_0} 2^{-n_0} |x_{n_0} - y_{n_0}| \leq 2^{n_0} d(x, y)$. On a montre que p_{n_0} est lipschitizienne, donc continue.
3. Si f est continue, sa composée avec l'application continue p_n est également continue. Réciproquement, si $p_n \circ f$ est continue pour tout n. Soit $(x, y) \in C^2$ et $\epsilon > 0$, soit n assez grand tel que $\sum_{k \geq n} 2^{-k} < \frac{\epsilon}{2}$. Comme les $p_k \circ f$ pour $k \leq n$ sont continues, il existe $\eta > 0$ tel que $\sum_{k \leq n} |p_k \circ f(x) - p_k \circ f(y)| < \frac{\epsilon}{2}$. Ainsi, $d(x, y) < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$.
4. C'est l'intersection des $p_n \circ f^{-1}\{0, 1\}$ qui sont fermés car $\{0, 1\}$ est fermé et $p_n \circ f$ continue.

Exercice 6 1. $d_F(x) = 0 \Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists y \in F | d(x, y) < \epsilon \Leftrightarrow x \in \overline{F}$

2. On montre que d_F est 1-lipschitizenne : soit $x, x' \in E$ et $y \in F$, l'inégalité triangulaire donne :

$$d(x, x') \geq d(x, y) - d(x', y) \geq (\inf_{y \in F} d(x, y)) - d(x', y)$$

Ceci pour tout $y \in F$, on peut donc passer au sup (qui se transforme en inf à cause du signe -) :

$$d(x, x') \leq d_F(x) - d_F(x')$$

Par symétrie en x, x', on obtient aussi

$$d(x, x') \leq d_F(x') - d_F(x)$$

C'est-à-dire :

$$|d_F(x) - d_F(x')| \leq d(x, x')$$

3. D'après la première question, la fonction d_F s'annule exactement sur F et d'après la deuxième question c'est une fonction continue.
4. On pose $f(x) = \frac{d_A(x)}{d_A(x) + d_B(x)}$, c'est continue comme rapport de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas.
5. On pose $f(x) = -d_A(x) + d_{E \setminus \mathring{A}}(x)$. Alors, sur A, $f(x) = d_{E \setminus \mathring{A}}(x) \geq 0$, sur ∂A, $f(x) = 0$ et sur $E \setminus A$, $f(x) < 0$. D'où le résultat.

Exercice 7 Par densité de $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, arbitrairement proche d'un rationnel $\frac{p}{q}$, f prend la valeur 0 alors que $f(\frac{p}{q}) \neq 0$. Par contre, si x est irrationnel, quand un rationnel s'en approche, son dénominateur tend vers $+\infty$ donc f est continue en x.

Exercice 8

1. On injecte E dans $\mathbb{Q}$ en choisissant un rationnel près de chaque point de E.
2. Tout voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ contient $\frac{1}{n}$ pour n assez grand, donc 0 n'est pas un point isolé de E. Tout voisinage d'un rationnel contient un autre rationnel, donc $\mathbb{Q}$ n'a pas de point isolé (c'est l'inverse d'un espace discret).
3. Tout voisinage d'un réel est indénombrable, donc contient des points de $\mathbb{R} \setminus E$, ainsi $\mathbb{R} \setminus E$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 9

1. On a $\overline{\mathring{A}} \subset \overline{A}$, donc $\overline{\mathring{\overline{A}}} \subset \overline{A}$. Pour l'autre inclusion, on a toujours $\mathring{\overline{A}} \supset \mathring{A}$, et comme A est ouvert, $\mathring{\overline{A}} \supset A$. Puis, $\overline{A} \subset \overline{\mathring{\overline{A}}}$.
2. On utilise $X \setminus \mathring{A} = \overline{X \setminus A}$ et $X \setminus \overline{A} = \mathring{X \setminus A}$ et en passant au complémentaire on peut appliquer le résultat de la question précédente.
3.

Exercice 10 1. Soit U un ouvert de E et $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partie dense dans E. On considère l'ensemble des boules $B(a_n, r) \subset U$ avec r rationnel. Ces boules sont en quantités dénombrables, il faut montrer qu'elles recouvrent U. Soit $x \in U$, et $\epsilon > 0$ tel que $B(x,\epsilon) \subset U$ par densité de a_n, il existe $a_{n_0} \in B(x, \frac{\epsilon}{2})$. Soit alors $r \in \mathbb{Q}$ tel que $d(a_{n_0}, x) < r < \frac{\epsilon}{2}$. Alors $B(a_{n_0}, r) \subset U$ et $x \in B(a_{n_0}, r)$. En fait, la famille des $B(a_n, r)$ avec r rationnel fournit une *base dénombrable d'ouverts*.

2. Soit $I = \{(n,k) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} | B(a_n, 2^{-k}) \cap F \neq \emptyset\}$. Pour tout $(n,k) \in I$, on choisit $x_{n,k} \in B(a_n, 2^{-k}) \cap F$. La famille $\{x_{n,k}\}$ est au plus dénombrable. Soit $x \in F$, $\epsilon > 0$, et k tel que $2^{-k} < \frac{\epsilon}{2}$. Par densité de $\{a_n\}$ dans E, il existe n tel que $d(x, a_n) < 2^{-k}$, et alors :
$$d(x, x_{n,k}) < d(x, a_n) + d(a_n, x_{n,k}) < 2^{-k} + 2^{-k} < \epsilon$$
3. On remarque qu'un ouvert et une partie dense s'intersecte toujours. Ainsi, pour tout $i \in I$, il existe x_{n_i} tel que $x_{n_i} \in U_i$. Comme les U_i sont disjoints, l'application $i \mapsto n_i$ est une injection.
4. Tout élément est limite d'une suite (convergente) de points $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. L'ensemble des suites d'éléments de $\{x_n\}$ s'injecte dans $\mathbb{R}$ car $\mathbb{N}$ s'injecte dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ et $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ s'injecte dans $\{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}} \simeq \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Les suites convergentes sont donc en quantité au plus $\mathbb{R}$ et il en va donc de même de E.

Exercice 11 1. L'espace de suites stationnaires à 0 est dense.

2. L'espace des polynômes à coefficients rationnels est dense.

1. La fonction $\zeta_x(y) = \delta_{x,y}$ est bornée et $d(\zeta_x, \zeta_{x'}) = \delta_{x,x'}$. Les boules ouvertes de rayons $\frac{1}{2}$ centrées en ces fonctions sont disjointes. Le critère de la question 3 de l'exercice précédent montre que cet espace n'est pas séparable.
2. L'espace des suites à valeurs dans $\{0, 1\}$ est égal à $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$, qui est en bijection avec $\mathbb{R}$. Ces suites sont à distance 0 ou 1. Donc les boules de rayon $\frac{1}{2}$ violent encore le critère de séparabilité.

Exercice 12 1. On vérifie les axiomes d'une distance : symétrie, séparation. Seule l'inégalité triangulaire n'est pas immédiate : soient $(x, y, z) \in (\mathbb{R}^2)^3$, on distingue trois cas :
- x, y, z sont colinéaires : $d(x, z) = \|x - y\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = d(x, z) = d(y, z)$
- x, y sont liés et z, y ne sont pas liés : $d(x, z) = \|x - z\| \leq \|x - y\| + \|y - z\| = d(x, y) + \|y - z\| \leq d(x, y) + \|y\| + \|z\| = d(x, y) + d(y, z)$
- $vect\{x, y, z\} = \mathbb{R}^2$, alors $d(x, z) = \|x\| + \|z\| \leq \|x\| + \|y\| + \|z\| + \|y\| = d(x, y) + d(y, z)$.

2. $B_d(x, 1) = [0, 2] \times \{0\}$ et $B_d(x, 2) = B(0, 1) \cup [1, 3] \times \{0\}$.
3. $d(x, y) \geq \|x - y\|$, donc l'identité de $(\mathbb{R}^2, d) \to (\mathbb{R}^2, \|\|_2)$ est 1-lipschitzienne, donc continue.
4. Ce n'est continue qu'en 0.
5. Soit t la translation de vecteur $\vec{v}$, et $\vec{w}$ l'image de v par la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. Les points 0 et $0 + \epsilon\vec{w}$ sont à distance $\epsilon\|v\|$ alors que leurs images sont à distance supérieure à $\|v\|$. La translation n'est donc pas continue en 0.
6. Les points du cercle unité S^1 sont à distance 2 les uns des autres pour la métrique SNCF, comme ces points sont en quantité indénombrable, l'espace n'est pas séparable.

Exercice 13 1. Supposons que $E \times F$ soit l'union disjointe de deux ouverts U et V. Chaque tranche $E \times \{x\}$ est l'union des deux ouverts $U \cap (E \times \{x\})$ et $V \cap (E \times \{x\})$. Comme $E \times \{x\}$ est connexe, l'un de ces deux ouverts est vide. Donc U est l'union de tranches horizontales. S'il est non vide, il contient au moins une tranche horizontale, donc intersecte toute tranche verticale. Et par connexité de F, contient toutes les tranches verticales. Ainsi U est soit vide soit $E \times F$, on a montré que $E \times F$ est connexe.

2. Le début est le même. Si U est non vide, comme A et B sont des parties strictes, U contient une tranche horizontale et une tranche verticale. Il contient alors toutes les tranches verticales et horizontales formant $E \times F \setminus A \times B$.

Exercice 14 1. Deux points du plan peuvent toujours être joints par une infinité indénombrable de chemins disjoints. Ils ne peuvent donc pas tous rencontrer une partie dénombrable fixée.

2. Le polynôme $P(z)$ s'annulent en un nombre fini points car il n'est pas le polynôme nul. On peut trouver un chemin $z(t)$ de nombres complexes qui évite ce nombre fini de points et alors $z(t)A + (1 - z(t))B$ joint A à B dans $GL(n, \mathbb{C})$.

3. det : $GL(n,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^*$ est continu et surjectif, donc $GL(n,\mathbb{R})$ n'est pas connexe. Il reste à montrer que les ouverts $\{det < 0\}$ et $\{det > 0\}$ sont les deux componsantes connexes de $GL(n,\mathbb{R})$. Toute matrice inversible s'écrit comme le produit de transvections et d'une matrice diagonale $diag(det, 1, \ldots, 1)$. Les transvections se déforment en l'identité et la dilatation se déforme en $diag(-1, 1, \ldots, 1)$ ou $diag(1, \cdots, 1)$ en fonction du signe du déterminant.

Exercice 15

Exercice 16 1. On note $\tilde{f} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ l'application induite. Soit O un ouvert de $\mathbb{Q}$, il s'écrit $U \cap \mathbb{Q}$ avec U ouvert de $\mathbb{R}$, donc $\tilde{f}^{-1}(O) = \tilde{f}^{-1}(U \cap \mathbb{Q}) = f^{-1}(U) \cap f^{-1}(\mathbb{Q}) = Q \cap f^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{Q}$ car $f^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$. Donc $\tilde{f}$ est continue.

2. La fonction $f(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q}$ est continue sur $\mathbb{Q}$. Pour étendre f en un point irrationnel x, on est obligé de poser $f(x) = 0$ puisque $f(\frac{p}{q}) = \frac{1}{q}$ tend vers 0 quand $\frac{p}{q}$ tend vers x. Mais alors on perd la continuité aux points rationnels... Donc ce n'est pas la restriction d'une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
3. Non ! $f(x) = x^2 - 2$ ne s'annule pas sur $\mathbb{Q}$ et prend pourtant des valeurs négatives et positives.
4. La fonction $f(x) = x$ sur $]-\infty, 1]$ et $f(x) = -\sqrt{2}x + 1 + \sqrt{2}$ sur $[1, +\infty[$ est injective sur $\mathbb{Q}$ mais pas sur $\mathbb{R}$. Par contre, une fonction injective sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est injective sur $\mathbb{R}$, montrons le. Supposons que $f(x) = f(y)$ avec $x < y \in \mathbb{Q}$. On regarde la restriction de f à l'intervalle $[x, y]$. Comme f est injective sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, elle n'est pas constante et par exemple, il existe $z \in]x, y[$ tel que $f(z) > f(x)$. Alors, toutes les valeurs entre $f(x)$ et $f(z)$ ont au moins deux antécédents d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Comme ces valeurs sont en quantité indénombrable et que $\mathbb{Q}$ est dénombrable, une de ces valeurs a deux antécédents irrationnels, contradiction.

Exercice 17

Exercice 18 1. Une fonction croissante admet toujours des limites à droite et à gauche. Ses points de discontinuité sont les points où ces limites ne coincident pas. A chaque discontinuité x on choisit un rationnel entre $f(x^-)$ et $f(x^+)$, cela fournit une injection de l'ensemble des discontinuités dans $\mathbb{Q}$.