ENS de Lyon **TD 2** **18-20/09/2012**
Topologie et Calcul Différentiel

Exercice 1 Nombres transcendants

1. Prouver que l'ensemble $\mathbb{Q}[X]$ est dénombrable.
2. Prouver que l'ensemble A des nombres complexes algébriques, c'est-à-dire qui sont racine d'un polynôme de $\mathbb{Q}[X]$ non nul, est dénombrable.
3. En déduire l'existence de nombres transcendants (c'est-à-dire non algébriques)

Exercice 2 Soient (E, d) et (F, δ) des espaces métriques, ainsi que $f : E \to F$ une application continue.

1. Soit $A \subset E$. Si A est ouvert, $f(A)$ est-il ouvert ? Si A est fermé, $f(A)$ est-il fermé ?
2. Soit $B \subset F$. Montrer que $\overline{f^{-1}(B)} \subset f^{-1}(\overline{B})$. Que dire de l'inclusion réciproque ?
3. Soit $B \subset F$. Montrer que $f^{-1}(\mathring{B}) \subset \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(B)}}$. Que dire de l'inclusion réciproque ?

Exercice 3

1. Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications continues, où X, Y et Z sont des espaces métriques. Montrer que $g \circ f$ est continue.
2. Soit (E, d) un espace métrique. Soient $x \in E$ et $r > 0$. Montrer que la boule fermée $\overline{B}(x, r) = \{y / d(x, y) \leq r\}$ est fermée.
3. Montrer que l'intersection de deux boules ouvertes est un ouvert.
4. Montrer que tout ouvert de E est une union de boules ouvertes.
5. Montrer que dans un espace vectoriel normé, l'adhérence de la boule ouverte de centre a et de rayon $r > 0$ est la boule fermée de centre a et de rayon r. Qu'en est-il dans le cas d'un espace métrique ?
6. Soient E et F deux espaces métriques. Donner une métrique naturelle sur $E \times F$. Vérifier que si U est un ouvert de E et V un ouvert de F, alors $U \times V$ est un ouvert de $E \times F$.

Exercice 4

1. Montrer que toute suite réelle croissante majorée converge.
2. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle strictement croissante et $E = \{u_n / n \in \mathbb{N}\}$. Montrer que E est fermé dans $\mathbb{R}$ si et seulement si $u_n \to +\infty$.

Exercice 5 Topologie produit

On munit $C = [0, 1]^{\mathbb{N}}$ de $d((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} 2^{-n} |x_n - y_n|$.

1. Montrer que d est une distance sur C.

2. On fixe $n_0 \in \mathbb{N}$. Montrer que l'application $p_{n_0} : (C, d) \to (\mathbb{R}, |.|)$ définie par $p_{n_0}((x_n)_{n\in\mathbb{N}}) = x_{n_0}$ est continue.
3. Soit (E, d) un espace métrique et $f : E \to C$. Montrer que f est continue si et seulement si $p_n \circ f$ est continue pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. On note $\Omega = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} / \forall n \in \mathbb{N}\ x_n \in \{0, 1\}\}$. Montrer que Ω est fermé dans C.

Exercice 6 Soit (E, d) un espace métrique, et F une partie non vide de E. Pour $x \in E$, on pose $d_F(x) = \inf_{y\in F} d(x, y)$.

1. Montrer que $d_F(x) = 0$ si et seulement si $x \in \overline{F}$.
2. Montrer que d_F est une fonction continue de E dans $\mathbb{R}$.
3. Montrer que tout fermé de E est l'ensemble des zéros d'un fonction continue $f : E \to \mathbb{R}$.
4. Lemme d'Urysohn : soient A et B deux fermés disjoints de E. Montrer qu'il existe une fonction continue $f : E \to [0, 1]$ telle que $A = f^{-1}(\{0\})$ et $B = f^{-1}(\{1\})$.
5. Soit $A \subset E$ un fermé. Montrer qu'il existe une fonction continue $f : E \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x \in E$:
   - $x \in A \iff f(x) \geq 0$
   - $x \in \partial A \iff f(x) = 0$.

Exercice 7 On définit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f(x) = 0$ si $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et $f(x) = \dfrac{1}{|q|}$ si $x = \dfrac{p}{q}$ avec $p \wedge q = 1$. Montrer que f est continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et discontinue en tout point de $\mathbb{Q}$.

Exercice 8

1. Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble discret. Montrer que E est au plus dénombrable.
2. Soit $E = \{\frac{1}{n} / n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{0\}$. Montrer que E n'est pas discret. L'ensemble $\mathbb{Q}$ est-il discret ?
3. Soit $E \subset \mathbb{R}$ un ensemble dénombrable. Montrer que $\mathbb{R} \setminus E$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 9 Soit (E, d) un espace métrique, et A une partie de E.

1. Montrer que si A est ouvert, alors $\overline{\mathring{\overline{A}}} = \overline{A}$.
2. Montrer que si A est fermé, alors $\mathring{\overline{\mathring{A}}} = \mathring{A}$.
3. Donner un exemple de partie A de $\mathbb{R}$ telle que les ensembles $A, \overline{A}, \mathring{A}, \overline{\mathring{A}}, \mathring{\overline{A}}, \overline{\mathring{\overline{A}}}$ et $\mathring{\overline{\mathring{A}}}$ soient tous distincts.

Exercice 10 Soit (E, d) un espace métrique séparable.

1. Montrer que tout ouvert de E est réunion au plus dénombrable de boules ouvertes.
2. Soit $F \subset E$ non vide. Montrer que (F, d) est séparable.

3. Soit $(U_i)_{i\in I}$ une famille d'ouverts disjoints et non vides de E. Montrer que I est au plus dénombrable.
4. Montrer que le cardinal de E est au plus celui de $\mathbb{R}$.

Exercice 11 Montrer que les espaces métriques suivants sont séparables :

1. L'espace c_0 des suites à valeurs réelles tendant vers 0 à l'infini, muni de la norme $\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.
2. L'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme sup.

Montrer que les espaces métriques suivants ne sont pas séparables :

1. L'espace des fonctions bornées de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$, muni de la norme sup.
2. L'espace ℓ^∞ des suites à valeurs réelles bornées, muni de la norme $\|u\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$.

Exercice 12 La distance SNCF

On considère l'application $d : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+$ définie par $d(X, Y) = \|X - Y\|_2$ si X et Y sont linéairement dépendants, $\|X\|_2 + \|Y\|_2$ sinon.

1. Montrer que d est une distance sur $\mathbb{R}^2$. Dérive-t-elle d'une norme ?
2. Soit $x = (1, 0)$. Déterminer les boules $B_d(x, 1), B_d(x, 2)$.
3. Montrer que l'application identité de $(\mathbb{R}^2, d)$ dans $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$ est continue.
4. Trouver les points où l'application identité de $(\mathbb{R}^2, \|.\|_2)$ dans $(\mathbb{R}^2, d)$ est continue.
5. Montrer que les translation non triviales de $(\mathbb{R}^2, d)$ dans lui-même ne sont pas continues.
6. Montrer que $(\mathbb{R}^2, d)$ n'est pas séparable.

Exercice 13 Soient (E, d) et (F, d') deux espaces métriques connexes.

1. Montrer que $E \times F$ est connexe.
2. Soient $A \subset E$ et $B \subset F$ tels que $A \neq E$ et $B \neq F$. Montrer que $(E \times F) \setminus (A \times B)$ est connexe.

Exercice 14

1. Montrer que le complémentaire d'un ensemble fini de points du plan complexe est connexe. Et pour un ensemble dénombrable de points ?
2. Montrer que le groupe $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe. (si A et B sont deux matrices de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, considérer le polynôme $P(z) = \det(zA + (1 - z)B)$).
3. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe. Décrire ses composantes connexes.

Exercice 15 Montrer qu'il n'existe pas d'homéomorphisme $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ pour $n \geq 2$.

Exercice 16

1. Montrer qu'une fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $f(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$ induit une fonction continue de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$. Donner un exemple de fonction continue de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$ qui n'est pas la restriction d'une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
2. Les fonctions continues de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{Q}$ vérifient-elles le Théorème des Valeurs Intermédiaires ?
3. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. Si f est injective sur $\mathbb{Q}$, est-elle nécessairement injective sur $\mathbb{R}$? Et si elle est injective sur $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$?

Exercice 17 Topologie p-adique

On dit qu'une distance d est ultramétrique si elle vérifie $d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z))$.

1. Soit p un nombre premier. On définit la norme p-adique d'un élément de $\mathbb{Q}$ par $\left|p^v \dfrac{a}{b}\right|_p = p^{-v}$ si $p \nmid ab$. Montrer que la distance sur $\mathbb{Q}$ définie par $d(x, y) = |x - y|_p$ est ultramétrique.
2. Calculer $\lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} 2^n$ pour la topologie 2-adique sur $\mathbb{Q}$.

Exercice 18

1. Soit f une fonction croissante sur $\mathbb{R}$. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est au plus dénombrable.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monotone. On suppose $f(\mathbb{R})$ dense dans $\mathbb{R}$. Montrer que f est continue.
3. Soient A et B deux parties dénombrables denses dans $\mathbb{R}$.
   (a) Construire, à l'aide d'une récurrence, une bijection strictement croissante φ de A dans B.
   (b) En utilisant l'ordre, montrer que φ se prolonge en une application $\overline{\varphi}$ strictement croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
   (c) Montrer que $\overline{\varphi}$ est un homéomorphisme.