Exercice 1

1. Vrai. Rédaction :

$$\begin{aligned} x \in (A \cup B) \cap C &\Leftrightarrow (x \in A \text{ ou } x \in B) \text{ et } x \in C \\ &\Leftrightarrow (x \in A \text{ et } x \in C) \text{ ou } (x \in B \text{ et } x \in C) \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cap C) \cup (B \cap C) \end{aligned}$$

2. Vrai.
3. Vrai.
4. Vrai.
5. Vrai.
6. Vrai.
7. Faux.
8. Vrai. Rédaction :

$$x \in (\cup E_i) \cap (\cup F_j) \Leftrightarrow \exists (i_0, j_0) \in I \times J, x \in E_{i_0} \cap F_{j_0} \Leftrightarrow x \in \cap (E_i \cap F_j)$$

Exercice 2

- f est injective non surjective.
- g est bijective.
- h est bijective (c'est une transformation linéaire inversible dont l'inverse est $h^{-1}(u, v) = (\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2})$.
- On l'écrit directement ou on remarque que c'est une homographie : k induit une bijection de $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dans lui-même, échange 1 et $+\infty$, k est donc injective, non surjective car 1 n'est pas dans l'image.

Exercice 3

1. Si f a un inverse à gauche, elle est injective. Réciproquement, si f est injective, on construit un inverse en posant $g = f^{-1}$ sur l'image de f et on prolonge g arbitrairement. g est alors surjective, pas nécessairement injective. Elle n'est pas unique en général puisqu'elle est arbitraire hors de l'image de f. C'est unique exactement dans le cas bijectif.
2. Si f a un inverse à droite, elle est surjective. Réciproquement, si f est surjective, on construit un inverse à droite en choisissant un antécédent par f pour tout élément de B. L'application g est alors injective, en général non surjective. Elle n'est pas unique en général puisque l'on fait des choix d'antécédents. C'est unique exactement dans le cas bijectif.

Exercice 4

1. $f(n) = (-1)^n \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$.
2. $f(n,m) = m + \frac{(n+m+1)(n+m)}{2}$ ou $g(n,m) = 2^m(2n+1)-1$, $g^{-1}(x) = (val_2(x+1), (x+1)/2^{val_2(x+1)}$.

Exercice 5 1. $x \in (g \circ f)^{-1}(C) \Leftrightarrow g(f(x)) \in C \Leftrightarrow f(x) \in g^{-1}(C) \Leftrightarrow x \in f^{-1}(g^{-1}(C))$.

2. $x \in f^{-1}(\cap C_i) \Leftrightarrow \forall i, f(x) \in C_i \Leftrightarrow \forall i, x \in f^{-1}(C_i) \Leftrightarrow x \in \cap f^{-1}(C_i)$. De même pour les autres.
3. $x \in f^{-1}(Y \setminus B) \Leftrightarrow f(x) \in Y \setminus B \Leftrightarrow x \in X$ et $f(x) \notin B \Leftrightarrow x \in X \setminus f^{-1}(B)$. Non, il faudrait que f soit bijective.
4. On a toujours $A \subset f^{-1}(f(A))$. Si f est injective, et $x \in f^{-1}(f(A))$ alors $\exists y \in A, f(x) = f(y)$ puis, par injectivité, $x = y \in A$. Réciproquement, on applique pour A un singleton : $\forall x, f^{-1}(f(x))$, donc $f(x)$ a un unique antécédent : x.
5. On a toujours $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Si f est surjective, et $x \in B$, alors par surjectivité, $\exists y, f(y) = x$. Alors $y \in f^{-1}(B)$ et $x \in f(f^{-1}(B))$.

Exercice 6 1. Pour toute partie S on a $S \subset f^{-1}(f(S))$ car si $x \in S$ alors $f(x) \in f(S)$. Soit A une partie de E, il suffit donc de montrer que $f^{-1}(f(f^{-1}(f(A)))) \subset f^{-1}(f(A))$ pour avoir l'égalité. Soit $x \in f^{-1}(f(f^{-1}(f(A))))$, par définition il existe $y \in f^{-1}(f(A))$ tel que $f(x) = f(y)$. Mais $y \in f^{-1}(f(A))$ signifie que $f(y) \in f(A)$, donc $f(x) \in f(A)$ ce qui prouve que $x \in f^{-1}(f(A))$.

2. Soit $\{C_i\}_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles de $\mathcal{S}$, on a

$$f^{-1}(f(\bigcup_{i\in I} C_i)) = f^{-1}(\bigcup_{i\in I} f(C_i)) = \bigcup_{i\in I} f^{-1}(f(C_i)) = \bigcup_{i\in I} C_i$$

3. Supposons par l'absurde qu'il existe $x \in f^{-1}(f(A)) \bigcap S$, en particulier $f(x) \in f(A)$ et il existe donc $y \in A$ tel que $f(y) = f(x)$. Mais puisque $x \in S$ on a donc $f(y) \in f(S)$, c'est à dire $y \in f^{-1}(f(S))$. Comme $f^{-1}(f(S)) = S$ on a donc $y \in S$, contradiction.
4. Il suffit de prouver que $f^{-1}(f(T \setminus S)) \subset T \setminus S$. Soit $x \in f^{-1}(f(T \setminus S))$, on a $f(x) \in f(T \setminus S)$ donc en particulier $f(x) \in f(T)$. Comme $T \in \mathcal{S}$, on a donc $x \in T$. Par hypothèse il existe $y \in T \setminus S$ tel que $f(y) = f(x)$, donc si x était dans S, alors y serait dans $f^{-1}(f(S))$ qui est égal à S, ce qui est absurde. On en déduit que $x \in T \setminus S$.

Exercice 7 1. Soient $x, y \in A$ si $f(x) = f(y)$ alors $g(f(x)) = g(f(y))$ d'où $x = y$, par injectivité de $g \circ f$.

2. Soit $y \in C$, par surjectivité de $g \circ f$ il existe $x \in A$ tel que $y = g(f(x))$.
3. $g \circ f$ est bijective, en particulier surjective, donc g est surjective. De même, $h \circ g$ est injective donc g est injective. On en déduit que g est bijective. On peut noter g^{-1} son inverse. $f = g^{-1} \circ g \circ f$ et $h = h \circ g \circ g^{-1}$ sont alors bijectives en tant que composées d'applications bijectives.

Exercice 8 On raisonne par l'absurde et on note f une surjection de X sur $\mathcal{P}(X)$. Soit $Y = \{x \in X, x \notin f(x)\}$, c'est un sous-ensemble de X, donc un élément de $\mathcal{P}(X)$. Il admet donc un antécédent par f que l'on note x.

Si $x \in Y$, alors par définition de Y on a $x \notin f(x)$, c'est à dire $x \notin Y$ ce qui est absurde.
Si $x \notin Y$ alors on a $x \in f(x)$, c'est à dire $x \in Y$ ce qui est de nouveau absurde.
On en déduit qu'une telle surjection f ne peut pas exister.

Exercice 9

1. On considére K une sous-partie dénombrable de $[0,1[$ dont on numérote les éléments : $K = \{a_0 < a_1 < \cdots < a_k < \cdots, k \in \mathbb{N}\}$. L'application qui associe à a_0 le nombre 1, à $a_i, i > 0$ le nombre a_{i-1} et à tout réel x de $[0,1[\backslash K$ le réel x est une bijection de $[0,1[$ dans $[0,1]$.
2. On remarque que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est en bijection avec $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ (fonction indicatrice associée à une partie). Une surjection possible de $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ sur $[0,1]$ consiste à associer à une suite de 0 et de 1 $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$, le nombre réel $x = 0, a_0a_1a_2...$ en base 2. L'existence d'un développement en base 2 pour tout réel donne la surjectivité. (pour atteindre 1, on utilise le développement impropre $0,111...$).
3. L'application $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \to [0,1]$ qui à une suite $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ associe le réel $x = 0, a_0a_1a_2...$ en base 3 est injective par unicité du développement impropre.

Exercice 10 Voici quelques indications à partir de l'interprétation suivante : on appelle *ancètre* d'un point x un point y de A ou de B qui arrive en x après applications successives de f et g. L'ensemble des antécédents est un graphe qui est soit un segment, soit un cercle, soit une demi-droite. On discrimine en trois catégories : segment avec nombre pair d'ancètres (A_p), segment avec nombre impair d'ancètres (A_i) et les autres (A_∞). On fait de même pour B et on remarque que f envoie bijectivement A_p sur B_i, A_∞ sur B_∞, et g envoie bijectivement B_p sur A_i. On recolle alors ces bijections en une bijection globale.