ENS de Lyon **TD 15** **11/12/2012**
Calcul différentiel

Exercice 1.

1. Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = & x(t)^2 \\ x(0) = & x_0 \end{cases}$$

2. Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'(t) = & x(t)^2 - 4 \\ x(0) = & x_0 \end{cases}$$

3. Montrer que le problème de Cauchy suivant admet une infinité de solutions :

$$\begin{cases} x'(t) = & \sqrt{|x(t)|} \\ x(0) = & 0 \end{cases}$$

4. Montrer que la seule solution de classe $\mathcal{C}^2$ au problème précédent est la solution nulle.

Exercice 2. Soit E un espace vectoriel normé de dimension finie, $I =]a, b[$ un ouvert de $\mathbb{R}$ et f une fonction continue de $I \times E$ à valeurs dans E. Pour $(t_0, x_0) \in I \times E$ on considère le système suivant :

$$\begin{cases} x'(t) = & f(t, x(t)) \\ x(t_0) = & x_0 \end{cases} \tag{1}$$

1. Soit (J, x) une solution de 1, telle que $\beta = \sup J < b$ et x est bornée au voisinage de β. Montrer que (J, x) peut être prolongée au-delà de β en une solution de 1.
2. On suppose de plus que pour tout segment S de I il existe deux constantes positives C_s, A_s telles que $\forall (t, x) \in S \times E$, $|f(t, x)| \leq C_s|x| + A_s$. Montrer alors que toute solution de 1 peut être prolongée en une solution globale.

Exercice 3. On considère dans $\mathbb{R}^2$ l'équation différentielle suivante :

$$\begin{cases} x' = & -y + x(x^2 + y^2) \\ y' = & x + y(x^2 + y^2) \end{cases} \tag{2}$$

Soit (x_0, y_0) un point distinct de l'origine et soit :

$$\gamma :]t_-, t_+[\to \mathbb{R}^2$$

la solution maximale de 2 telle que $\gamma(0) = (x_0, y_0)$. Soit $H(x, y) = x^2 + y^2$ et $h = H \circ \gamma$.

1. Exprimer $\frac{dh}{dt}$ en fonction de $\gamma(t)$. En déduire que $t_- = -\infty$.

2. Montrer que h est un difféomorphisme :

$$h :]t_-, t_+[\to]u_-, u_+[.$$

Calculer le difféomorphisme réciproque $t = k(u)$. Montrer que $u_- = 0$.

3. Montrer que t_+ est fini. En déduire que $u_+ = +\infty$. Donner l'allure des orbites.

Exercice 4. On considère $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application localement lipschitzienne. Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on note (I_x, f_x) la solution maximale du problème de Cauchy :

$$\begin{cases} y'(t) = & X(y(t)) \\ y(0) = & x \end{cases}$$

1. On suppose que $t \in I_x$ et $s \in I_{f_x(t)}$. Montrer que $t + s \in I_x$ et que $f_x(t+s) = f_{x(t)}(s)$.
2. On suppose $t > 0$ et $s > 0$, et $t + s \in I_x$. Montrer que $t \in I_x$, que $s \in I_{f_x(t)}$ et que $f_x(t+s) = f_{x(t)}(s)$.

Exercice 5. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction continue, localement lipschitzienne par rapport à la deuxième variable, et vérifiant $f(t+1, x) = f(t, x)$ quels que soient t et x. On considère l'équation (E) donnée par $x'(t) = f(t, x(t))$. Le but du problème est de montrer le Théorème de Massera : si (E) admet une solution x définie sur $\mathbb{R}$ et bornée, alors (E) admet une solution x périodique de période 1.
Soit donc x une solution définie sur $\mathbb{R}$ et bornée, et $x_n(t) = x(t+n)$ pour $n \geq 0$.

1. Montrer que s'il existe $t \in \mathbb{R}$ tel que $x_1(t) = x_0(t)$, alors x est en fait périodique de période 1.
2. On suppose que $x_1(t) > x_0(t)$ quel que soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que si $t \in \mathbb{R}$, alors la suite $(x_n(t))_{n\in\mathbb{N}}$ admet une limite, que l'on note $x_\infty(t)$. Montrer que la fonction $t \mapsto x_\infty(t)$ est périodique de période 1.
3. Montrer que si $I = [a, b]$ est un intervalle compact de $\mathbb{R}$, alors $\|x_n(t) - x_\infty(t)\|_I \to 0$ si $n \to \infty$ (on pourra montrer que $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ est une partie équicontinue de $C^0([a, b], \mathbb{R})$).
4. En déduire le Théorème de Massera.

Exercice 6. Sous-groupe à un paramètre de $GL_n(\mathbb{R})$
Soit $\varphi : \mathbb{R} \to GL_n(\mathbb{R})$ une application continue telle que

$$\forall (s, t) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s).$$

Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi(t) = e^{tA}.$$