1 Sous-variétés

Exercice 1. Pour $R > 0$, les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad x^2 + y^2 - 2x = 0$$

définissent-elles une sous-variété de $\mathbb{R}^3$? Déterminer ses espaces tangents et ses projections sur les trois plans de coordonnées.

Exercice 2. Montrer que $SL(n, \mathbb{R})$ est une sous-variété de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 3. Soit C une sous-variété C^1 compacte de dimension 1 du plan qui délimite un domaine convexe sur lequel on joue au billard. Montrer qu'il existe toujours une trajectoire fermée à trois rebonds (on cherchera un triangle inscrit de périmètre maximale).

Exercice 4. Montrer que l'image d'une immersion injective propre $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ est une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 5. L'ensemble des projecteurs de $\mathbb{R}^2$ forment-ils une sous-variété de $M_2(\mathbb{R})$? même question pour les projecteurs de rang 1 ?

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle que $f \circ f = Id$. On pose $Fix(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = x\}$.

1. Supposons $f(0) = 0$. On définit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par $h(x) = \frac{1}{2}(x + df_0(f(x)))$. Montrer que h est un difféomorphisme entre voisinages de 0.
2. Montrer que $h \circ f = df_0 \circ h$.
3. En déduire que $Fix(f) = \{x | f(x) = x\}$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

2 Equations différentielles linéaires

Exercice 7. Dimension 1

Dessiner les portraits de phase des équations différentielles affines autonomes en dimension 1 réel puis complexe.

Exercice 8. Dimension 2

Dessiner les portraits de phase des équations différentielles affines autonomes en dimension 2 réel.

Exercice 9. Un calcul d'exponentielle

Trouver la résolvante de l'équation différentielle

$$\begin{cases} x' &= x+y \\ y' &= 2x \end{cases}$$

et en déduire la matrice $\exp(tA)$ pour $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 10. Solutions bornées

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes

1. Pour toute application continue bornée b de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}^n$, les solutions de $x' = Ax + b$ sont bornées sur $\mathbb{R}_+$.
2. $\mathrm{Sp}(A) \subset \{z \in \mathbb{C} \mid \Re(z) < 0\}$.

Exercice 11. Wronskien

Soit f, g une base de solutions de l'équation différentielle homogène

$$x''(t) + p(t)x'(t) + q(t)x(t) = 0$$

où p et q sont des fonctions continues sur un intervalle ouvert $I =]a, b[$ de $\mathbb{R}$.

1. Prouver que les zéros de f sont isolés.
2. Prouver qu'entre deux zéros consécutifs de f il y a un unique zéro de g.
3. On considère $x_r :]a, b[\to \mathbb{R}, r \in \{1, 2\}$ tels que :

   $$x_r''(t) + q_r(t)x_r(t) = 0.$$

   On suppose que :

   $$q_1 \leq q_2$$

   On suppose que x_1 s'annule en α et β distincts et que x_1 et x_2 ne sont pas proportionnels. Montrer que x_2 s'annule en un point dans $]\alpha, \beta[$.
   Indication : On pourra considérer $W(t) = x_2(t)x_1'(t) - x_2'(t)x_1(t)$.
4. Soit $x :]a, b[\to \mathbb{R}$ une solution non triviale de $x'' + qx = 0$.
   Montrer que si $q \geq \lambda^2$, alors x s'annule au moins une fois dans tout intervalle fermé de longueur $\frac{\pi}{\lambda}$.

Exercice 12. On considère l'équation différentielle $x' = Ax$ où A est un endomorphisme d'un espace vectoriel complexe de dimension finie.

1. Montrer que si $x(t) = e^{r_1 t}u_1 + e^{r_2 t}u_2$ avec $r_1 \neq r_2$, est une solution alors $e^{r_1 t}u_1$ et $e^{r_2 t}u_2$ sont aussi solutions.
2. Si $e^{rt}(u + tv)$ est solution et $v \neq 0$, montrer que u est proportionnel à v, et que le noyau de l'endomorphisme $(A - r\mathrm{id})^2$ est de dimension plus grande que 2.

Exercice 13. Soit $A : \mathbb{R}^+ \to M_n(\mathbb{R})$ continue tels que chaque coefficient de $A(t)$ soit positif pour tout temps.

1. Soit $Y : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ une solution de $Y' = AY$ tel que $Y(0)$ soit à coefficients strictement positifs. Montrer qu'alors $Y(t)$ est à coefficients strictement positifs pour tout temps.
2. Montrer qu'il existe une solution non nulle Y à coefficients positifs de $Y' = -AY$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 14. Sous-groupe à un paramètre de $GL_n(R)$

Soit $\varphi : \mathbb{R} \to GL_n(R)$ une application continue telle que

$$\forall (s,t) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(t+s) = \varphi(t)\varphi(s).$$

Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(R)$ telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi(t) = e^{tA}.$$