ENS de Lyon **TD 13** **27-29/11/2012**
Topologie

Exercice 1. Montrer que le dual d'un espace vectoriel normé est un espace de Banach.

Exercice 2. Métrisabilité

Soit E un espace vectoriel normé tel que la topologie faible sur E est métrisable. On va montrer que E est de dimension finie.

1. Montrer que dans un espace métrique tout point admet une base dénombrable de voisinages.
2. Montrer qu'il existe une famille dénombrable $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^*$ telle que
$$V_n = \{x \in E | \forall k \leq n, |f_k(x)| < 1\}$$
est une base de voisinages de 0.
3. Montrer que E^* est engendré algébriquement par les f_n (on pourra utilise le lemme d'algèbre linéaire suivant : $f_1, \dots, f_n, h$ sont des formes linéaires telles que $\cap \ker f_i \subset \ker h$ alors $h = \sum \lambda_i f_i$).
4. En déduire que E est de dimension finie.

Exercice 3.

1. Montrer que $(\ell^1)^*$ est isométrique à ℓ^∞.
2. Montrer que ℓ^1 n'est pas réflexif.

Exercice 4. Soit H un espace de Hilbert et $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une base hilbertienne.

1. Soit $(c_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$. Montrer que $\sum_{k\in\mathbb{N}} c_k e_k$ converge.
2. Montrer que $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge faiblement vers 0.

Exercice 5. Soit H un espace de Hilbert et $(e_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ une famille de vecteurs telle qu'il existe $A, B > 0$ vérifiant :
$$\forall v \in E, \quad A\|v\|^2 \leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} |< v, e_k >|^2 \leq B\|v\|^2$$

1. Montrer que l'application $\phi : H \to \ell^2(\mathbb{Z})$ donnée par $\phi(v) = (< v, e_k >)_{k\in\mathbb{Z}}$ est bien définie et induit un isomorphisme (topologique) sur son image que l'on note V.
2. V est-il fermé dans $\ell^2(\mathbb{Z})$?
3. Montrer que l'adjoint $\phi^* : V \to H$ est bien défini et induit un isomorphisme (topologique) de V sur H.
4. On note $\pi_k : \ell^2(\mathbb{Z}) \to \mathbb{R}$ la projection sur la k-ième coordonnée. Montrer que $\pi_k \circ (\phi^*)^{-1}$ est une forme linéaire continue sur H et en déduire l'existence d'une famille $(\tilde{e_k})$ de H telle que :
$$\forall v \in H, v = \sum_{k\in\mathbb{Z}} < v, \tilde{e_k} > e_k = \sum_{k\in\mathbb{Z}} < v, e_k > \tilde{e_k}$$

Exercice 6. Trouver un fermé dans un espace de Hilbert sur lequel on ne peut pas projeter.

Exercice 7. Algèbre linéaire

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et $u, v \in L(E, F)$.

1. Montrer que si u et v ont même rang, il existe $\varphi \in GL(E)$ et $\psi \in GL(F)$ tel que $u = \psi \circ v \circ \varphi^{-1}$.
2. A quelle condition existe-t-il $\psi \in GL(F)$ tel que $u = \psi \circ v$?
   On définit $f, g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f(x,y) = x^7 + xy^3 + y^2 + y$ et $g(x,y) = x^2 + x^4 y + x^3 y^5 + y^3 + x$. Existe-t-il un difféomorphisme Ψ entre voisinages de 0 dans $\mathbb{R}$ tel que $f = \Psi \circ g$?
3. A quelle condition existe-t-il $\varphi \in GL(E)$ tel que $u = v \circ \varphi^{-1}$?
   Existe-t-il un difféomorphisme Φ entre voisinages de 0 dans $\mathbb{R}^2$ tel que $f = g \circ \Phi$?

Exercice 8.

Déterminer si les application suivantes sont des immersions et/ou des submersions :

- $\begin{cases} \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* \\ z \mapsto z^2 \end{cases}$
- $\begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z^2 \end{cases}$
- $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \begin{cases} (0, e^{-\frac{1}{t}}) \text{ si } t > 0 \\ (0,0) \text{ si } t = 0 \\ (e^{\frac{1}{t}}, 0) \text{ si } t < 0 \end{cases} \end{cases}$
- $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto r(t) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{cases}$ si $r^2 + (r')^2 \neq 0$.
- $\begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \to x^2 + y^2 - z^2 \end{cases}$
- $\begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(2t) \end{pmatrix} \end{cases}$

Pour le dernier exemple, trouver une fonction dont un niveau est l'image de cette application. Que se passe-t-il en $(0,0)$?

Exercice 9. Enoncer et démontrer le lemme des immersions.

Exercice 10. Application du théorème du rang

1. Soit $A : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire. À quelle condition A est-elle ouverte ?

2. Soit $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 qui est injective. Montrer que $m \leq n$ et que Df est de rang m sur un ouvert dense.

Exercice 11.

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une application C^∞, injective qui est une immersion. Son image est-elle une sous-variété de $\mathbb{R}^2$?

Exercice 12. Involutions

Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 telle que $f \circ f = Id$. On pose $Fix(f) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = x\}$.

1. Supposons $f(0) = 0$. On définit $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ par $h(x) = \frac{1}{2}(x + df_0(f(x)))$. Montrer que h est un difféomorphisme entre voisinages de 0.
2. Montrer que $h \circ f = df_0 \circ h$.
3. En déduire que $Fix(f)$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

Exercice 13. Rétractions

1. Soit $r : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une fonction C^1 telle que $r(x, 0) = (x, 0)$ et dr est de rang 1 partout. Montrer que r est à valeurs dans $\mathbb{R} \times \{0\}$.
2. Soit M une sous-variété de dim k de $\mathbb{R}^n$, U un voisinage ouvert de M et $r : U \to U$ une application C^∞ de rang partout égal à k tel que $r(x) = x$ pour tout $x \in M$. Montrer que r est à valeurs dans M.
3. Soit U un ouvert connexe de $\mathbb{R}^n$ et $r : U \to U$ une application C^∞ telle que $r \circ r = r$. On note M l'image de r. Montrer que r est de rang constant près de M et en déduire que que M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.