Exercice 1. Soient E un espace vectoriel normé et $x \in E$.

1. Montrer qu'il existe $f \in E^*$ tel que $\|f\| = \|x\|$ et $f(x) = \|x\|^2$.
2. Montrer que
$$\|x\| = \sup_{f \in E^*, \|f\| \leq 1} |f(x)| = \max_{f \in E^*, \|f\| \leq 1} |f(x)|$$

Exercice 2. Soient E un espace de Banach, B un sous-ensemble de E et B^* un sous-ensemble de E^*.

1. Montrer que si pour tout $x \in E$ l'ensemble $\{f(x), f \in B^*\}$ est borné alors B^* est borné.
2. Montrer que si pour tout $f \in E^*$ l'ensemble $\{f(x), x \in B\}$ est borné alors B est borné. Est-ce encore vrai si E est un espace vectoriel normé pas nécessairement complet ?

Exercice 3. Soit E un espace de Banach pour les normes $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$. On suppose qu'il existe $c > 0$ tel que $\|\cdot\|_1 \leq c\|\cdot\|_2$. Montrer que $\|\cdot\|_1$ et $\|\cdot\|_2$ sont équivalentes.

Exercice 4. Soient H un espace de Hilbert et V un sous-espace vectoriel fermé. Montrer que la projection orthogonale sur V est de norme 1.

Exercice 5. Soient E un espace vectoriel normé. Montrer que tout sous-espace vectoriel de dimension finie admet un supplémentaire fermé.

Exercice 6. Soit H un espace de Hilbert et C un convexe fermé non vide de H.

1. Montrer que le projeté $p(x)$ de x sur C est caractérisé par les conditions
   (a) $p(x) \in C$;
   (b) pour tout $y \in C$, $\langle p(x) - x, p(x) - y \rangle \leq 0$.
2. Si C est de plus un sous-espace vectoriel, montrer que $p(x)$ est caractérisé par les conditions
   (a) $p(x) \in C$;
   (b) pour tout $y \in C$, $\langle p(x) - x, y \rangle = 0$.
3. Décrire p pour $H = l_2(\mathbb{N}, \mathbb{R})$ et $C = \{x, x_n \geq 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}\}$.

Exercice 7. Théorème de Hahn-Banach géométrique
On admet la généralisation suivante du théorème de Hahn-Banach.

Théorème 1. *Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $p : E \to \mathbb{R}$ une application telle que*
- *pour tout $x \in E$ et pour tout $\lambda > 0$, on ait $p(\lambda x) = \lambda p(x)$;*
- *pour tous $x, y \in E$, on ait $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$.*

Soit F un sous espace vectoriel de E et f une forme linéaire de F telle que pour tout $x \in F$ on ait $f(x) \leq p(x)$. Alors il existe une forme linéaire g définie sur E qui prolonge f et telle que pour tout $x \in E$ on ait $g(x) \leq p(x)$.

Soit E un espace vectoriel normé. On rappelle qu'un hyperplan affine H est un ensemble de la forme $H = \{x \in E, f(x) = a\}$ où f est une forme linéaire non nulle et $a \in \mathbb{R}$. Soient A et B deux sous-ensembles de E. On dit qu'un hyperplan affine H sépare A et B si $f(A) \leq a \leq f(B)$ et que H sépare strictement A et B s'il existe $\epsilon > 0$ tel que $f(A) \leq a - \epsilon$ et $a + \epsilon \leq f(B)$. L'objectif de cet exercice est de montrer les théorèmes suivants.

Théorème 2. *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et A et B deux sous-ensembles convexes non vide et disjoints. On suppose de plus que A est ouvert. Alors il existe un hyperplan affine fermé qui sépare A et B.*

Théorème 3. *Soient E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé et A et B deux sous-ensembles convexes non vide et disjoints. On suppose de plus que A est fermé et que B est compact. Alors il existe un hyperplan affine fermé qui sépare strictement A et B.*

1. Montrer que le théoreme 1 implique le théorème de Hahn-Banach.
2. Montrer que H est fermé si et seulement si f est continue.
3. Soit C un convexe ouvert non vide de E contenant 0. Pour tout $x \in E$, on pose
$$p(x) = \inf \left\{ c > 0, \frac{x}{c} \in C \right\}.$$
Monter que p vérifie les hypothèses du théorème 1, qu'il existe $M > 0$ tel que $p(x) \leq M\|x\|$ et que $C = \{x, p(x) < 1\}$.
4. Soit $x_0 \notin C$. Monter qu'il existe une forme linéaire continue f telle que $f(x) < f(x_0)$ pour tout $x \in C$.
5. En déduire le théorème 2.
6. En déduire le théorème 3.

Exercice 8. Soit E un espace vectoriel normé.

1. Montrer que si E est de dimension finie alors la topologie de la norme coïncide avec la topologie faible sur E.

   On suppose dorénavant que E est de dimension infinie.
2. Montrer que tout voisinage de 0 pour la topologie faible contient un sous-espace vectoriel non trivial.
3. Existe-t-il une norme sur E qui définisse la topologie faible ?
4. Montrer que si C est convexe alors les adhérences de C pour la topologie faible et pour la topologie de la norme sont les mêmes.
5. Décrire l'adhérence de la shère unité pour la topologie faible.

Exercice 9.

1. Montrer que $(l_1)^*$ est isométrique à l_∞.
2. Montrer que l_1 n'est pas réflexif.

Exercice 10. Soient E un espace de Banach séparable réflexif et A un sous-ensemble convexe, fermé et borné. Soit $f : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexe telle que

$$\{(x, r) \in E \times \mathbb{R}, f(x) \leq r\}$$

est fermé pour la topologie produit (on dit alors que f est semi-continue inférieurement). Montrer que f atteint son minimum sur A.

Exercice 11. Soient E un espace vectoriel normé et $f_0, \dots, f_n$ des formes linéaires. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

1. Il existe $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $f_0 = \sum_{i=1}^n \lambda_i f_i$.
2. Il existe $M \geq 0$ tel que pour tout $x \in E$ on ait $|f_0(x)| \leq M \max_{i=1\dots n} |f_i(x)|$.
3. Si $f_i(x) = 0$ pour tout $i = 1 \dots n$ alors $f_0(x) = 0$.

Exercice 12. Moyennabilité
Soit G un groupe muni de la topologie discrète. On dit que G est *moyennable* s'il existe une forme linéaire non-nulle Λ sur $l^\infty(G)$ qui est invariante par translation à gauche (i.e. $\forall f \in l^\infty(G)\ \forall g \in G\ \Lambda(g_\star f) = \Lambda(f)$), positive (i.e. si $f \geq 0$ alors $\Lambda(f) \geq 0$) et telle que $\Lambda(\mathbf{1}_G) = 1$. Une telle forme linéaire est encore appelée une *moyenne* sur G.

1. On considère l'opérateur $S : l^\infty(\mathbb{Z}) \to l^\infty(\mathbb{Z})$ tel que $(Sf)(n) = f(n+1)$. Montrer que $Im(S - Id) = Vect(\{m_\star f - f,\ f \in l^\infty(\mathbb{Z}) \text{ et } m \in \mathbb{Z}\})$.
2. Vérifier que $\mathcal{C} := \{f \in l^\infty(\mathbb{Z}),\ \exists \varepsilon > 0\ f \geq \varepsilon\}$ est convexe, ouvert et contient $\mathbf{1}_\mathbb{Z}$.
3. Montrer que $\mathcal{C}$ et $Im(S - Id)$ sont disjoints.
4. En déduire que $\mathbb{Z}$ est moyennable.
5. $(\star\star)$ Montrer que le groupe libre à deux générateurs $\mathbb{F}_2$ n'est pas moyennable (*mais au fait, qu'est-ce que le groupe libre ?*).