Exercice 6.

1. Supposons $[0,1] = \bigcup_{n=0}^{N} F_n$, et soit i tel que $F_i \neq \emptyset$. On écrit alors $[0,1] = F_i \cup (\bigcup_{n \neq i} F_n)$. Or $\bigcup_{n \neq i} F_n$ est un fermé comme réunion finie de fermés. Par connexité de $[0,1]$, on en déduit que $[0,1] = F_i$ et $F_n = \emptyset$ si $n \neq i$.
2. Comme les $\mathring{F}_n$ sont des ouverts, on en déduit que O est une réunion d'ouverts, donc un ouvert. Si les F_n étaient tous d'intérieurs vide, le Théorème de Baire nous dirait (car $[0,1]$ est complet) que leur réunion est d'intérieur vide. Comme cette réunion est $[0,1]$, on en déduit qu'au moins un des F_n est d'intérieur non vide, donc O est non vide.
3. Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble des composantes connexes de O. Les éléments de $\mathcal{C}$ sont des connexes de O, donc de $\mathbb{R}$, donc sont des intervalles. Les composantes connexes sont des ouverts de O, et O est ouvert, donc ces intervalles sont ouverts. En associant à une composante connexe un rationnel qu'elle contient, on construit une injection de $\mathcal{C}$ vers $\mathbb{Q}$, ainsi $\mathcal{C}$ est au plus dénombrable. On déduit le résultat du fait que O est réunion de ses composantes connexes.
4. Soit $(k,n) \in \mathbb{N}^2$. On a :

$$I_k \cap F_n = I_k \cap F_n \cap O = I_k \cap \Big(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \underbrace{F_n \cap \mathring{F}_m}_{\substack{= \mathring{F}_n \text{ si } m=n \\ = \emptyset \text{ sinon}}} \Big) = I_k \cap \mathring{F}_n$$

Ainsi $I_k \cap \mathring{F}_n$ est ouvert et fermé dans I_k, donc est soit vide soit égal à I_k par connexité.
Soit $x \in I_k \subset O$. Soit $\alpha(k) \in \mathbb{N}$ tel que $x \in \mathring{F}_{\alpha(k)}$. On a $I_k \cap \mathring{F}_{\alpha(k)} \neq \emptyset$, donc $I_k \subset \mathring{F}_{\alpha(k)}$. L'unicité vient du fait que les F_n sont disjoints.
5. On sait que G est un fermé de $[0,1]$, donc complet, et que $G = \bigcup_{n \geq 0} G \cap F_n$, ainsi par le Théorème de Baire il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $G \cap F_{n_0}$ est d'intérieur non vide dans G, donc contient un ouvert non vide de G, donc contient un ensemble de la forme $G \cap]a,b[$ avec $G \cap]a,b[\neq \emptyset$, ce qui est le résultat souhaité.
6. Supposons, par l'absurde, que $G = \emptyset$. Soient $n_0 \in \mathbb{N}$ et $a < b$ dans $[0,1]$ tels que $G \cap]a,b[\neq \emptyset$ et $G \cap]a,b[\subset F_{n_0}$. Soit $x \in]a,b[\cap O$, et soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $x \in I_k$. Comme $G \cap]a,b[\neq \emptyset$, au moins l'une des deux extrémités de I_k est dans $]a,b[$, donc dans $G \cap]a,b[$, donc dans F_{n_0}. Or, comme $F_{\alpha(k)}$ est fermé, cette extrémité est dans $F_{\alpha(k)}$, ce qui montre que $\alpha(k) = n_0$. On a ainsi montré que $]a,b[\subset F_{n_0}$, or comme $]a,b[$ est ouvert, on a $]a,b[\subset \mathring{F}_{n_0} \subset O$, et $G \cap O \neq \emptyset$ ce qui est absurde. Donc $G = \emptyset$.
On a donc $O = [0,1]$, ainsi $F_n = \mathring{F}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, et par connexité on a $F_n = \emptyset$ ou $[0,1]$.