Exercice 1.

1. Montrer qu'il n'existe pas d'espace métrique complet dénombrable sans point isolé.
2. Montrer qu'aucun espace de Banach n'admet une base dénombrable.

Exercice 2.

1. Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ et discontinue en tout point de $\mathbb{Q}$.
2. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue en tout point de $\mathbb{Q}$ et discontinue en tout point de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ (on pourra commencer par montrer que l'ensemble des points de continuité de f est un G_δ).

Exercice 3.

Soient E un espace de Banach, F et G des evn.

1. Montrer qu'une limite simple d'application linéaires continues de E vers F est une application linéaire continue.
2. Soit $B : E \times F \to G$ une application bilinéaire dont les application partielles sont continues. Montrer que B est continue.

Exercice 4.

Soient $\omega \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ continue et positive. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère des réels $(\lambda_{i,n})_{0\leq i\leq n}$ et des points de $[a, b]$ deux à deux distincts $(x_{i,n})_{0\leq i\leq n}$.

Pour $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$ on note $I_n(f) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_{i,n} f(x_{i,n})$ et $E_n(f) = \int_a^b f(x)\omega(x)dx - I_n(f)$.

1. Montrer que l'application $E_n : C^0([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ est linéaire continue (pour la norme sup sur $C^0([a, b], \mathbb{R})$) et vérifie :
$$\sum_{i=0}^{n} |\lambda_{i,n}| - \int_a^b \omega(x)dx \leq |||E_n||| \leq \sum_{i=0}^{n} |\lambda_{i,n}| + \int_a^b \omega(x)dx$$
2. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes (Théorème de Polya) :
   (a) $\forall f \in C^0([a, b], \mathbb{R})\ \lim_{n\to+\infty} E_n(f) = 0$
   (b) $\forall P \in \mathbb{R}[X]\ \lim_{n\to+\infty} E_n(P) = 0$ et $\exists M > 0\ \forall n \in \mathbb{N}\ \sum_{i=0}^{n} |\lambda_{i,n}| \leq M$
3. Montrer que si $\lim_{n\to+\infty} E_n(P) = 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ et s'il existe n_0 tel que $\lambda_{i,n} \geq 0$ pour tout $n \geq n_0$ et $0 \leq i \leq n$, alors $\lim_{n\to+\infty} E_n(f) = 0$ pour tout $f \in C^0([a, b], \mathbb{R})$.

Exercice 5.

Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On suppose que pour tout $x > 0$, la suite $(f(nx))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 lorsque $n \to \infty$. Montrer, à l'aide du Théorème de Baire, que $f(x) \to 0$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 6. On veut montrer que $[0;1]$ ne s'écrit pas comme union dénombrable de fermés disjoints (exceptée la décomposition triviale en un fermé). On suppose donc que

$$[0;1] = \cup_{n\geq 0} F_n,$$

où les F_n sont fermés (et l'union disjointe).

1. Que dire s'il s'agit d'une réunion finie ?
2. Soit $O = \cup_{n\geq 0}\text{int}(F_n)$. Montrer que O est un ouvert non-vide.
3. Montrer que O est une réunion (au plus) dénombrable d'intervalles ouverts disjoints $I_k \subset [0,1]$ $(k \in \mathbb{N})$.
4. Montrer que pour tout entier k, il existe un unique entier $\alpha(k)$ tel que $I_k \subset \text{int}(F_{\alpha(k)})$.
5. On note G le complémentaire de O dans $[0;1]$. On suppose que G est non-vide. Montrer qu'alors il existe n_0 dans $\mathbb{N}$ et $a < b$ dans $[0;1]$ tels que :
$$G\cap]a;b[\neq \emptyset \quad \text{et} \quad G\cap]a,b[\subset F_{n_0}.$$
6. Montrer que G est vide et conclure.

Exercice 7. [Théorème de Sunyer y Balager]

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction C^∞. On suppose : $\forall x \in I,\ \exists n \in \mathbb{N},\ f^{(n)}(x) = 0$. On se propose de montrer : $\exists n \in \mathbb{N},\ \forall x \in I,\ f^{(n)}(x) = 0$ (autrement dit, f est une fonction polynomiale). On dit que $x \in I$ est polynomial s'il existe un voisinage de x dans I sur lequel f coïncide avec un polynôme.

1. Soit $J \subset I$ un intervalle tel que tout $x \in J$ est polynomial. Montrer que f coïncide avec un polynôme sur J.
2. Soit F_n l'ensemble des points $x \in I$ tels que $f^{(n)}(x) = 0$. Monter que F_n est un fermé de I.
3. Soit Z l'ensemble des points de I qui ne sont pas polynomiaux. Montrer que Z est un fermé de I sans point isolé.
4. Soit $Z_n = Z \cap F_n$. On suppose que Z est non vide. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert U de I et un entier n_0 tels que $Z \cap U \neq \emptyset$ et $Z \cap U \subset Z_{n_0}$.
5. Montrer que pour tout $x \in Z \cap U$, pour tout $n \geq n_0$, on a $f^{(n)}(x) = 0$.
6. Soit $x \in (I \setminus Z) \cap U$. Montrer qu'il existe a et b tels que $]a,b[$ est un voisinage de x contenu dans $(I \setminus Z) \cap U$ et que a ou b est dans $Z \cap U$. En déduire que f coïncide sur $]a,b[$ avec un polynôme de degré inférieur ou égal à n_0.

7. En déduire que f coïncide avec un polynôme de degré au plus n_0 sur U, puis que Z est vide, et conclure.

Exercice 8. Soit (X, d) un espace métrique complet, et soit U un ouvert de X. Pour $x, y \in U$, on définit :

$$\delta(x, y) = \left| \frac{1}{d(x, X \setminus U)} - \frac{1}{d(y, X \setminus U)} \right| + d(x, y)$$

1. Montrer que δ est une distance sur U.
2. Montrer que δ définit la même topologie que d sur U.
3. Montrer que U satisfait les conclusions du Théorème de Baire.

Exercice 9.
Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach. Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces fermés de E. On suppose que la somme $F_1 + F_2 = \{x + y, x \in F_1, y \in F_2\}$ est fermée. Montrer qu'il existe une constante C telle que pour tout z de $F_1 + F_2$, il existe x_1 dans F_1 et x_2 dans F_2 avec : $z = x_1 + x_2$ et $\|x_1\| \leq C\|z\|$, $\|x_2\| \leq C\|z\|$.