Exercice 1. Calculer les différentielles en tout point des applications suivantes, en précisant leurs noyaux et images. Déterminer l'ensemble des points critiques pour les fonctions à valeurs réelles.

1. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\|_2 \end{array}$
2. $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & \frac{x}{\|x\|_2} \end{array}$
3. $\begin{array}{ccc} Gl_n(\mathbb{R}) & \to & Gl_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tMM \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & Sym_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & {}^tMM \end{array}$
4. $\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & PMP^{-1} \end{array}$ où $P \in Gl_n(\mathbb{R})$
5. $\begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & det(M) \end{array}$ et $\begin{array}{ccc} Gl_n(\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & det(M) \end{array}$

Exercice 2. Formules de Taylor, exemples et contre-exemples

1. Ecrire le développement limité à l'ordre six en $(0,0)$ de $f(x,y) = x^7 + x^5y - x^4 + y^3$.
2. Ecrire le développement limité à l'ordre $n-1$ de det en $\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Ecrire le développement limité à l'ordre 2 de det en $\begin{pmatrix} I_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
4. L'égalité des accroissements finis est-elle vraie pour des fonctions à valeurs dans $\mathbb{C}$? Redémontrer la formule de Taylor-Lagrange pour une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. En déduire un énoncé correct d'une formule de Taylor-Lagrange pour des fonctions de plusieurs variables.

Exercice 3. Soit C l'ensemble des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que

$$x^3 + y^3 - 3xy = 0.$$

1. Cette équation définit-elle y comme fonction implicite de x ? Lorsque c'est le cas, calculer la dérivée de la fonction implicite et écrire l'équation de la tangente à C.

2. Dessiner C et préciser l'asymptote. On pourra pour cela calculer l'intersection de C avec la droite $y = tx$ et en déduire une paramétrisation de C.

Exercice 4.

1. Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^2 dont la matrice jacobienne est antisymétrique en tout point. Montrer que f est affine.
2. On rappelle que $O_{p,q}(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid {}^tMI_{p,q}M = I_{p,q}\}$ où $I_{p,q} = \begin{pmatrix} Id_p & 0 \\ 0 & -Id_q \end{pmatrix}$

   Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une application de classe C^2 dont la matrice jacobienne est dans $O_{p,q}(\mathbb{R})$ en tout point. Montrer que f est affine (*on pourra commencer par le cas $q = 0$ et par rappeler que les vecteurs colonnes de $M \in O_{p,0}(\mathbb{R})$ forment une famille orthonormée*).

Exercice 5.

Soit E et F deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions finies, soit U et V deux ouverts de E et $f : U \to F$ et $\varphi : V \to U$ des applications C^2.

1. Soit $x \in V$, calculer $D^2_x(f \circ \varphi)$ en utilisant la formule de Taylor-Young.
2. Écrire l'expression de la différentielle du composé $D_x(f \circ \varphi)$ comme composé de trois applications élémentaires. Différentier chacune de ces applications, puis retrouver le résultat précédent.

L'exercice 7 permettra de dégager des conséquences géométriques importantes de ce calcul.

Exercice 6. Lemme de Morse linéaire

1. Montrer que $A \sim B$ ssi $\exists P \in Gl_n(\mathbb{R})$ $A = {}^tPBP$ est une relation d'équivalence sur $Sym_n(\mathbb{R})$.
2. On note $I_{p,q} = \begin{pmatrix} Id_p & 0 & 0 \\ 0 & -Id_q & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que si $(p, q) \neq (p', q')$ alors $I_{p,q} \not\sim I_{p',q'}$.
3. Réciproquement, montrer que pour toute matrice A symétrique il existe (p, q) tel que $A \sim I_{p,q}$.

On appelle rang de A l'entier $p + q$ et signature de A le couple (p, q).

Exercice 7. Lemme de Morse

1. *Question préliminaire d'algèbre bilinéaire :* Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel, dont on note $\mathcal{E} = (e_i)_{i\in[1,n]}$ une base. On rappelle que $\varphi_{\mathcal{E}} : BS(E \times E, \mathbb{R}) \to Sym(n, \mathbb{R})$, qui à b associe la matrice $(b(e_i, e_j))_{i,j}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels, tel que si x, y ont pour vecteurs-coordonnées X, Y dans la base $\mathcal{E}$, alors $b(x, y) = X^T\varphi_{\mathcal{E}}(b)Y$. Rappeler le lien entre $\varphi_{\mathcal{E}}$ et $\varphi_{\mathcal{E}'}$ où $\mathcal{E}'$ est une autre base de E. On définit ainsi une relation d'équivalence sur $Sym_n(\mathbb{R})$.
2. Existe-t-il un changement de coordonnées local en 0 qui envoie localement le graphe de $f(u, v) = u^2 + v^2$ sur celui de $g(u, v) = uv$?

   La suite de l'exercice étudie la réciproque : on considère $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(0) = 0$, $D_0f = 0$ et $D^2_0 f$ est de rang n et de signature (p, q) (cf exercice 6). On se propose de démontrer le lemme de Morse : il existe un changement de coordonnées local en 0 qui rend f quadratique.

3. Montrer qu'il existe $h : \Omega \to Sym_n(\mathbb{R})$ avec Ω voisinage de 0 telle que :

$$f(x) = f(0) + {}^t x h(x) x$$

4. Soit $A \in Sym_n(\mathbb{R})$ de rang n et de signature (p, q), montrer qu'il existe un ouvert U de $Sym_n(\mathbb{R})$ contenant A et une application $g : U \to Sym_n(\mathbb{R})$ telle que

$$ {}^t g(M) M g(M) = I_{p,q}$$

5. En déduire le lemme de Morse.

Exercice 8. Déterminer le rang de la différentielle en chaque point et, autant que faire se peut, les lignes de niveau des applications suivantes :

$$\begin{cases} \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* \\ z \mapsto z^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto \begin{cases} (0, e^{-\frac{1}{t}}) \text{ si } t > 0 \\ (0,0) \text{ si } t = 0 \\ (e^{\frac{1}{t}}, 0) \text{ si } t < 0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \\ (x,y,z) \to x^2 + y^2 - z^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbb{C} \to \mathbb{C}^* \\ z \mapsto e^z \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ t \mapsto r(t) \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \end{cases} \quad \text{si } r^2 + (r')^2 \neq 0.$$

Exercice 9. Application du théorème du rang

1. Soit $A : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application linéaire. À quelle condition A est-elle ouverte ?
2. Soit $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1 qui est injective. Montrer que $m \leq n$ et que Df est de rang m sur un ouvert dense.