ENS Lyon **TD 1** **13/09/2012**
Topologie

Exercice 1 On note $\mathcal{P}(Y)$ l'ensemble des parties de l'ensemble Y. Soient A, B et C trois sous-ensembles de l'ensemble X. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ?

1. $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;
2. $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$;
3. $(X \setminus A) \cap (X \setminus B) = X \setminus (A \cup B)$;
4. $(X \setminus A) \cup (X \setminus B) = X \setminus (A \cap B)$;
5. Si $A \cap B = A \cap C$ et $A \cup B = A \cup C$ alors $B = C$;
6. $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$;
7. $\mathcal{P}(A \cup B) = \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$;
8. $(\cup_{i \in I} E_i) \cap (\cup_{j \in J} F_j) = \cup_{(i,j) \in I \times J}(E_i \cap F_j)$.

Exercice 2 Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array}, \qquad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ n & \longmapsto & n+1 \end{array},$$

$$h : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (x+y, x-y) \end{array}, \qquad k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x+1}{x-1} \end{array}.$$

Exercice 3 Soient A, B deux ensembles non vides.

1. Montrer que $f : A \to B$ est injective si et seulement s'il existe $g : B \to A$ tel que $g \circ f = \mathrm{Id}_A$. L'application g est-elle injective, surjective ? Étudier l'unicité de g.
2. Montrer que $f : A \to B$ est surjective si et seulement s'il existe $g : B \to A$ tel que $f \circ g = \mathrm{Id}_B$. L'application g est-elle injective, surjective ? Étudier l'unicité de g.

Exercice 4

1. Donner une bijection explicite de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{Z}$.
2. Donner une bijection explicite de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{N}^2$.

Exercice 5 Soient $f : X \to Y$ et $g : Y \to Z$ deux applications. Montrer que

1. pour chaque sous-ensemble $C \subset Z$ on a $(g \circ f)^{-1}(C) = f^{-1}(g^{-1}(C))$;
2. pour toute famille de sous-ensembles $\{C\}_{i \in I}$ de Y on a

$$f^{-1}(\bigcap_{i \in I} C_i) = \bigcap_{i \in I} f^{-1}(C_i), \quad f^{-1}(\bigcup_{i \in I} C_i) = \bigcup_{i \in I} f^{-1}(C_i) \quad \text{et} \quad g(\bigcup_{i \in I} C_i) = \bigcup_{i \in I} g(C_i);$$

3. si $A \subset X$ et $B \subset Y$ alors $f^{-1}(Y \setminus B) = X \setminus f^{-1}(B)$. A-t-on $f(X \setminus A) = Y \setminus f(A)$?

4. f est injective si et seulement si pour toute partie A de X, $f^{-1}(f(A)) = A$;
5. f est surjective si et seulement si pour toute partie B de Y, $f(f^{-1}(B)) = B$.

Exercice 6 Soit f une application d'un ensemble E dans lui-même. On désigne par $\mathcal{S}$ la famille des parties S de E qui vérifient $f^{-1}(f(S)) = S$.

1. Si A est une partie de E, démontrer que $f^{-1}(f(A))$ est un élément de $\mathcal{S}$.
2. Démontrer que toute réunion d'éléments de $\mathcal{S}$ est encore un élément de $\mathcal{S}$.
3. Si S est un élément de $\mathcal{S}$ et A une partie de E disjointe de S, montrer que S et $f^{-1}(f(A))$ sont disjointes.
4. Si $S \subset T$ sont deux éléments de $\mathcal{S}$, montrer que $T \setminus S$ est dans $\mathcal{S}$.

Exercice 7 On considère quatre ensembles A, B, C et D et les applications $f : A \to B$, $g : B \to C$ et $h : C \to D$. Montrer que

1. si $g \circ f$ est injective alors f est injective ;
2. si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective ;
3. si $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives alors f, g et h sont bijectives.

Exercice 8 Soit X un ensemble, et $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X. Montrer qu'il n'y a pas de surjection de X sur $\mathcal{P}(X)$. (Indication : soit f une telle surjection, que dire de l'ensemble $Y = \{x \in X, x \notin f(x)\}$?)

Exercice 9 On note $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$.

1. Construire une bijection entre $[0,1]$ et $[0,1[$.
2. Construire une surjection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ sur $[0,1]$.
3. Construire une injection de $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ dans $[0,1]$.

Exercice 10 Soient A et B deux ensembles, f une injection de A dans B et g une injection de B dans A. On se propose de montrer qu'il existe une bijection de A vers B (théorème de Cantor-Bernstein).

1. On note A_p l'ensemble des éléments de A qui peuvent s'écrire $(g \circ f)^n(x)$ où $n \in \mathbb{N}$ et $x \in A \setminus g(B)$. On note A_i l'ensemble des éléments de A qui peuvent s'écrire $(g \circ f)^n(g(x))$ où $n \in \mathbb{N}$ et $x \in B \setminus f(A)$. Montrer que A_p et A_i sont disjoints.
2. On note B_p et B_i les parties de B définies de façon analogue. Montrer que f induit une bijection de A_p sur B_i et que g induit une bijection de B_p sur A_i.
3. On note A_∞ le complémentaire de $A_p \cup A_i$ dans A, et B_∞ le complémentaire de $B_p \cup B_i$ dans B. Montrer que f induit une bijection de A_∞ sur B_∞.
4. Conclure.