Exercice 1. 1. Soit G un supplémentaire de F dans E. On a $\dim(G) \geq 2$ par hypothèse. Posons p la projection sur G parallèlement à F et $q = Id - p$ la projection sur F parallèlement à G. Soient $x, y \in E \setminus F$. Deux situations sont possibles :

- Soit $(p(x), p(y))$ est libre. Dans ce cas, on pose $\gamma(t) = (1-t)x + ty$ pour $t \in [0,1]$. On a $p(\gamma(t)) = (1-t)p(x) + tp(y) \neq 0$ pour tout $t \in [0,1]$, ainsi $\gamma(t) \in E \setminus F$, et on a trouvé un chemin continu qui relie x à y dans $E \setminus F$.
- Soit $(p(x), p(y))$ est liée. On peut alors trouver $z \in G \setminus \{0\}$ qui est linéairement indépendant de $p(x)$ et de $p(y)$ (c'est ici que l'on utilise $\dim(G) \geq 2$). On pose alors $\gamma(t) = (1-2t)x + 2tz$ pour $t \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ et $\gamma(t) = 2(1-t)z + (1-2t)y$ pour $t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$. Ceci définit bien un chemin continu reliant x et y dans $E \setminus F$.

2. Si F est un hyperplan, on peut écrire $F = \ker f$ où $f : E \to \mathbb{R}$ est une forme linéaire. Comme E est de dimension finie, on sait que f est continue. Posons maintenant $U_+ = f^{-1}(]0, +\infty[)$ et $U_- = f^{-1}(]-\infty, 0[)$. Montrons qu'il s'agit des composantes connexes de $E \setminus F$. Commençons par remarquer que U_+ et U_- sont convexes, donc connexes. Soit $x \in U_+$, notons C sa composante connexe dans $E \setminus F$. Comme U_+ est connexe et contient x, on a $U_+ \subset C$. Comme C est connexe et f est continue, on sait que $f(C)$ est un connexe de $\mathbb{R}_*$, donc un intervalle, et qu'il intersecte $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit que $f(C) \subset \mathbb{R}_+^*$, d'où $C \subset f^{-1}(\mathbb{R}_+^*) = U_+$. Ceci montre que $C = U_+$. De même, si $x \in U_-$, sa composante connexe est U_-.

Exercice 2. 1. L'espace des fonctions continues bornées sur un espace métrique muni de la norme uniforme est complet. Une application continue $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ est toujours bornée car $[0,1]$ est compact. Par conséquent l'ensemble Y des fonctions continues $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ muni de la norme uniforme est complet.

Montrons que X est fermé dans Y et donc complet. Soit $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X qui converge vers γ dans Y. Alors $\lim_{n\to\infty} d_{\mathbb{R}^2}(\gamma_n(0), \gamma(0)) = 0$. Or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n(0) = A$ donc $\gamma(0) = A$. De même $\lim_{n\to\infty} d_{\mathbb{R}^2}(\gamma_n(1), \gamma(1)) = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\gamma_n(1) = E$. Par conséquent $\gamma(1) = E$. Ainsi $\gamma \in X$ et X est fermé dans un espace complet donc complet.

2. On note $t_{\overrightarrow{u}}$ la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ et R_P^θ la rotation de centre P et d'angle θ.

• Soit $h_2 = R_B^{\frac{\pi}{3}} \circ t_{\overrightarrow{AB}} \circ h$. L'application h_2 est une composée d'applications affines donc affine. En particulier l'image d'un segment par h_2 est un segment. Ainsi $h_2([AE]) = [h_2(A)h_2(E)]$. Or

$$h_2(A) = R_B^{\frac{\pi}{3}} \circ t_{\overrightarrow{AB}}(A) = R_B^{\frac{\pi}{3}}(B) = B$$

$$h_2(E) = R_B^{\frac{\pi}{3}} \circ t_{\overrightarrow{AB}}(B) = R_B^{\frac{\pi}{3}}(D) = C$$

car BCD est un triangle équilatéral. Donc $h_2([AE]) = [B, C]$. En outre, pour tous M et N dans $\mathbb{R}^2$, on a

$$d_{\mathbb{R}^2}(h_2(M), h_2(N)) = \frac{1}{3} d_{\mathbb{R}^2}\left(R_B^{\frac{\pi}{3}} \circ t_{\overrightarrow{AB}}(M), R_B^{\frac{\pi}{3}} \circ t_{\overrightarrow{AB}}(N)\right) = \frac{1}{3} d_{\mathbb{R}^2}(M, N))$$

car les translations et les rotations sont des isométries. Par conséquent $R_B^{\frac{\pi}{3}} \circ t_{\overrightarrow{AB}} \circ h$ vérifie les propriétés demandées à H_2.

• Soit $h_3 = R_D^{-\frac{\pi}{3}} \circ t_{\overrightarrow{AB}} \circ h$. On a

$$h_3(A) = R_D^{-\frac{\pi}{3}} \circ t_{\overrightarrow{AB}}(A) = R_D^{-\frac{\pi}{3}}(B) = C$$

$$h_3(E) = R_D^{-\frac{\pi}{3}} \circ t_{\overrightarrow{AB}}(B) = R_D^{-\frac{\pi}{3}}(D) = D.$$

Donc $h_3([AE]) = [C, D]$ car h_3 est affine. De plus, comme h multiplie les distance par $\frac{1}{3}$ et que les translations et les rotations sont des isométries, h_3 multiplie les distances par $\frac{1}{3}$. Par conséquent $R_D^{-\frac{\pi}{3}} \circ t_{\overrightarrow{AB}} \circ h$ vérifie les propriétés demandées à H_3.

• Soit $h_4 = t_{\overrightarrow{AD}} \circ h$. On a

$$h_4(A) = t_{\overrightarrow{AD}}(A) = D$$

$$h_4(E) = t_{\overrightarrow{AD}}(B) = E.$$

Donc $h_3([AE]) = [D, E]$ car h_4 est affine. De plus, comme h multiplie les distance par $\frac{1}{3}$ et que les translations sont des isométries, h_4 multiplie les distances par $\frac{1}{3}$. Par conséquent $t_{\overrightarrow{AD}} \circ h$ vérifie les propriétés demandées à H_4.

3. Comme γ, H_1, H_2, H_3 et H_4 sont continues, δ est continue sur

$$\left[0, \frac{1}{4}\right[\cup \left]\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right[\cup \left]\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right[\cup \left]\frac{3}{4}, 1\right].$$

De plus

$$\lim_{t \to \frac{1}{4}^-} H_1(\gamma(4t)) = \lim_{t \to 1^-} H_1(\gamma(t)) = H_1(E) = B$$

$$\lim_{t \to \frac{1}{4}^+} H_2(\gamma(4t - 1)) = \lim_{t \to 0^+} H_2(\gamma(t)) = H_2(A) = B$$

donc δ est continue en $\frac{1}{4}$. De même

$$\lim_{t \to \frac{1}{2}^-} H_2(\gamma(4t - 1)) = \lim_{t \to 1^-} H_2(\gamma(t)) = H_2(E) = C$$

$$\lim_{t \to \frac{1}{2}^+} H_3(\gamma(4t - 2)) = \lim_{t \to 0^+} H_3(\gamma(t)) = H_3(A) = C$$

donc δ est continue en $\frac{1}{2}$. Enfin

$$\lim_{t \to \frac{3}{4}^-} H_3(\gamma(4t - 2)) = \lim_{t \to 1^-} H_3(\gamma(t)) = H_3(E) = D$$

$$\lim_{t \to \frac{3}{4}^+} H_4(\gamma(4t-3)) = \lim_{t \to 0^+} H_4(\gamma(t)) = H_4(A) = D$$

donc δ est continue en $\frac{3}{4}$. Par conséquent δ est continue. En outre

$$\delta(0) = H_1(\gamma(0)) = H_1(A) = A$$

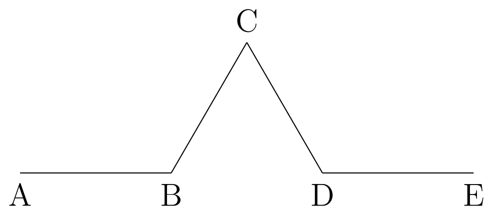
$$\delta(1) = H_4(\gamma(1)) = H_4(E) = E.$$

Ainsi $\delta \in X$.

4. Comme H_1, H_2, H_3 et H_4 sont affines, on a

$$\gamma_1([0,1]) = \left[\gamma_1(0), \gamma_1\left(\frac{1}{4}\right)\right] \cup \left[\gamma_1\left(\frac{1}{4}\right), \gamma_1\left(\frac{1}{2}\right)\right] \cup \left[\gamma_1\left(\frac{1}{2}\right), \gamma_1\left(\frac{3}{4}\right)\right] \cup \left[\gamma_1\left(\frac{3}{4}\right), \gamma_1(1)\right].$$

De plus $\gamma_1(0) = A$, $\gamma_1\left(\frac{1}{4}\right) = H_1(\gamma_0(1)) = B$, $\gamma_1\left(\frac{1}{2}\right) = H_2(\gamma_0(1)) = C$, $\gamma_1\left(\frac{3}{4}\right) = H_3(\gamma_0(1)) = D$ et $\gamma_1(1) = E$. On obtient donc le dessin suivant.



5. Soient γ_0 et γ_1 deux éléments de X. Pour tous $i \in \{0,1,2,3\}$ et $t \in \left[\frac{i}{4}, \frac{i+1}{4}\right]$,

$$d_{\mathbb{R}^2}\left(T(\gamma_0(t)), T(\gamma_1(t))\right) = d_{\mathbb{R}^2}\left(H_{i+1}(\gamma_0(4t-i)), H_{i+1}(\gamma_1(4t-i))\right).$$

Ainsi,

$$d_{\mathbb{R}^2}\left(T(\gamma_0(t)), T(\gamma_1(t))\right) = \frac{1}{3} d_{\mathbb{R}^2}\left(\gamma_0(4t-i), \gamma_1(4t-i)\right) \leq \frac{1}{3} d\left(\gamma_0, \gamma_1\right)$$

car H_i multiplie les distances par $\frac{1}{3}$. Par conséquent, pour tout $t \in [0,1]$,

$$d_{\mathbb{R}^2}\left(T(\gamma_0(t)), T(\gamma_1(t))\right) \leq \frac{1}{3} d\left(\gamma_0, \gamma_1\right)$$

et donc

$$d\left(T(\gamma_0), T(\gamma_1)\right) \leq \frac{1}{3} d\left(\gamma_0, \gamma_1\right).$$

Donc T est $\frac{1}{3}$-contractante.

6. (X, d) est complet et T est $\frac{1}{3}$-contractante donc T admet un unique point fixe γ_∞ par le théorème du point fixe de Picard.

7. On pose $\gamma_n = T^n(\gamma_0)$. Par le théorème du point fixe de Picard $\gamma_\infty = \lim_{n\to\infty} \gamma_n$. Par inégalité triangulaire, pour tout $N > 3$, on a

$$d(\gamma_3, \gamma_N) \leq \sum_{n=3}^{N-1} d(\gamma_n, \gamma_{n+1}).$$

Ainsi

$$d(\gamma_3, \gamma_N) \leq \sum_{n=3}^{\infty} d(\gamma_n, \gamma_{n+1}).$$

En passant à la limite, on obtient

$$d(\gamma_3, \gamma_\infty) \leq \sum_{n=3}^{\infty} d(\gamma_n, \gamma_{n+1}).$$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $d(\gamma_n, \gamma_{n+1}) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n d(\gamma_0, \gamma_1)$. Pour $n = 0$, l'inégalité devient $d(\gamma_0, \gamma_1) \leq \ d(\gamma_0, \gamma_1)$. Supposons maintenant le résultat vrai au rang n. Alors

$$d(\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}) = d(T(\gamma_n), T(\gamma_{n+1})) \leq \frac{1}{3} d(\gamma_n, \gamma_{n+1}).$$

Par hypothèse de récurrence, on obtient

$$d(\gamma_{n+1}, \gamma_{n+2}) \leq \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} d(\gamma_0, \gamma_1).$$

Ceci clôt la récurrence.

Par conséquent

$$d(\gamma_3, \gamma_N) \leq \sum_{n=3}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n d(\gamma_0, \gamma_1) = \frac{d(\gamma_0, \gamma_1)}{18}.$$

En outre $\gamma_0([0,1]) \subset B\left(\left(\frac{1}{2}, 0\right), \frac{1}{2}\right)$ et $\gamma_1([0,1]) \subset B\left(\left(\frac{1}{2}, 0\right), \frac{1}{2}\right)$. Ainsi $d(\gamma_0, \gamma_1) \leq 1$ et

$$d(\gamma_3, \gamma_N) \leq \frac{1}{18}.$$

Exercice 3. 1. On a $d(f,g) \geq 0$ car il s'agit d'une série (sommable) à termes positifs ou nuls, et si $d(f,g) = 0$ alors $\min(1, \|f-g\|_\infty) = 0$ d'où $f = g$. Réciproquement $d(f,f) = 0$. On a aussi $d(g,f) = d(f,g)$ car tous les termes des deux séries sont égaux. Il reste à montrer l'inégalité triangulaire. Pour alléger la preuve, nous allons utiliser un résultat plus général qui nous servira également plus loin.

Lemme 1. *Soit (X,d) un espace métrique. On pose $\delta(x,y) = \min(1, d(x,y))$. Alors δ est une distance qui définit la même topologie que d.*

De plus une suite est de Cauchy pour d si et seulement si elle est de Cauchy pour δ.

Démonstration. On a $\delta(x,y) \geq 0$ car $1 \geq 0$ et $d(x,y) \geq 0$. On a aussi :

$$\delta(y,x) = \min(1, d(y,x)) = \min(1, d(x,y)) = \delta(x,y)$$

et $\delta(x,y) = 0 \iff d(x,y) = 0 \iff x = y$.
Soient $x, y, z \in X$. Supposons que $d(x,y) \geq 1$ ou $d(y,z) \geq 1$. On a alors :

$$\min(1, d(x,y)) + \min(1, d(y,z)) \geq 1 \geq \min(1, d(x,z))$$

Si ce n'est pas le cas, on a $d(x,y) < 1$ et $d(y,z) < 1$, d'où :

$$\delta(x,y) + \delta(y,z) = d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z) \geq \delta(x,z)$$

On a bien montré que dans tous les cas, $\delta(x,y) + \delta(y,z) \geq \delta(x,z)$, donc δ est une distance.
Comme $\delta(x,y) \leq d(x,y)$ pour tous $x, y \in X$, on en déduit que l'application $Id : (X,\delta) \to (X,d)$ est continue. Dans l'autre sens, si $x_n \to x$ pour d, soit $\varepsilon > 0$. Considérons N tel que $d(x_n, x) < \min(1, \varepsilon)$ pour $n \geq N$. On a donc aussi $\delta(x_n, x) = d(x_n, x) < \varepsilon$ pour $n \geq N$, donc $x_n \to x$ pour δ, autrement dit l'application $Id : (X,d) \to (X,\delta)$ est continue, donc les deux distances définissent la même topologie.
Comme $\delta \leq d$, on en déduit directement qu'une suite de Cauchy pour d est de Cauchy pour δ. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy pour δ. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\delta(x_n, x_p) < \min(1, \varepsilon)$ pour $n, p \geq N$. On déduit de $\delta(x_n, x_p) < 1$ que $d(x_n, x_p) = \delta(x_n, x_p) < \varepsilon$ pour $n, p \geq N$, ainsi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy pour d. □

En particulier, (X,d) est complet si et seulement si (X,δ) est complet.

En remarquant que $d(f,g) = \sum_{k\in\mathbb{N}} 2^{-k} d_0(f^{(k)}, g^{(k)})$ où $d_0(f,g) = \min(1, \|f-g\|_\infty)$ est une distance sur $C^0([0,1],\mathbb{R})$ d'après le Lemme 1, on obtient l'inégalité triangulaire pour d (car on l'a sur tous les termes de la série définissant d).

Montrons maintenant que (E,d) est complet. On rappelle la démarche classique pour montrer qu'un espace est complet :
– on considère une suite de Cauchy (f_n) dans E ;
– on cherche un candidat f à être la limite de (f_n) ;
– on montre que $f \in E$;
– on montre que $f_n \to f$.
Soit donc $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy. Soit $k \in \mathbb{N}$. On déduit de l'inégalité $d_0(f_n^{(k)}, f_p^{(k)}) \leq 2^k d(f_n, f_p)$ que $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $(C^0([0,1],\mathbb{R}), d_0)$, donc dans $(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ d'après le Lemme 1. Étant donné que $(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ est complet, posons g_k la limite de $(f_n^{(k)})$ dans $(C^0([0,1],\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ et $f = g_0$. Nous allons montrer dans un premier temps que $f \in E$ et que $f^{(k)} = g_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Pour alléger la rédaction, nous allons faire intervenir deux lemmes intermédiaires qui permettent de conclure.

Lemme 2. *Soit* $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite dans* $C^1([0,1],\mathbb{R})$ *telle que* $(h_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers une fonction* h *et* $(h'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers une fonction* g. *Alors* h *est* C^1 *et* $h' = g$.

Démonstration. Soit $x \in [0,1]$. Il s'agit de montrer que $h(x) = \int_0^x g(t)dt$. On a $h_n(x) \to h(x)$ et $h_n(x) = \int_0^x h'_n(t)dt$. Or on a :

$$\begin{aligned} \left|\int_0^x g(t)dt - \int_0^x h'_n(t)dt\right| &\leq \int_0^x |g(t) - h'_n(t)|dt \\ &\leq x\|g - h'_n\|_\infty \to 0 \end{aligned}$$

Ainsi $\int_0^x h'_n(t)dt \to \int_0^x g(t)dt$ et $h(x) = \int_0^x g(t)dt$. D'après le Théorème Fondamental de l'Analyse, h est C^1 et $h' = g$. □

Lemme 3. *Soit* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ *une suite telle que pour tout* $k \in \mathbb{N}$ *la suite* $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ *converge uniformément vers* $g_k \in C^0([0,1],\mathbb{R})$. *Alors* $f := g_0 \in E$ *et* $f^{(k)} = g_k$ *pour tout* $k \in \mathbb{N}$. *De plus,* $f_n \to f$ *dans* E.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}$. On sait que la suite $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ est dans $C^1([0,1],\mathbb{R})$, qu'elle converge uniformément vers g_k et que la suite de ses dérivées est $(f_n^{(k+1)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers g_{k+1}. On déduit alors du lemme précédent que g_k est C^1 et $g'_k = g_{k+1}$.

Montrons par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$, f est C^k et $f^{(k)} = g_k$. Pour $k = 0$, c'est la définition de f. Supposons la propriété vraie au rang k. On a alors $f^{(k)} = g_k$ qui est C^1, autrement dit f est de classe C^{k+1} et $f^{(k+1)} = g'_k = g_{k+1}$. Par récurrence, on en déduit que f est de classe C^∞, i.e. $f \in E$, et que $f^{(k)} = g_k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Il ne reste plus qu'à montrer que $f_n \to f$ dans E. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $K \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{k>K} 2^{-k} \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Pour $0 \leq k \leq K$, on sait que $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément (donc pour la distance d_0) vers $g_k = f^{(k)}$. Soit $N_k \in \mathbb{N}$ tel que $d_0(f_n^{(k)}, f^{(k)}) < \frac{\varepsilon}{2(K+1)}$. Posons $N = \max_{0\leq k\leq K} N_k$. Si $n \geq N$ alors $n \geq N_k$ pour tout $k \leq K$, d'où :

$$\sum_{k=0}^{K} 2^{-k} d_0(f_n^{(k)}, f^{(k)}) \leq (K+1)\frac{\varepsilon}{2(K+1)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Ainsi :

$$d(f_n, f) = \underbrace{\sum_{k=0}^{K} 2^{-k} d_0(f_n^{(k)}, f^{(k)})}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} + \underbrace{\sum_{k>K} 2^{-k} d_0(f_n^{(k)}, f^{(k)})}_{\leq \frac{\varepsilon}{2}} \leq \varepsilon$$

On a bien montré que $f_n \to f$ dans (E, d).

□

2. Soit $k \in \mathbb{N}$. Posons $O = B(0, 2^{-k-2})$. Comme B est borné, il existe $\lambda > 0$ tel que $\lambda B \subset O$. Posons $M_k = \dfrac{1}{2\lambda}$. Soit $f \in B$. On a $\lambda f \in O$, ce qui nous donne $2^{-k-1}\min(1, \|\lambda f^{(k)}\|_\infty) \leq d(0, \lambda f) < 2^{-k-2}$. Ainsi $\min(1, \|\lambda f^{(k)}\|_\infty) \leq \dfrac{1}{2} < 1$ donc $\|\lambda f^{(k)}\|_\infty \leq \dfrac{1}{2}$ et $\|f^{(k)}\|_\infty \leq \frac{1}{2\lambda} = M_k$.
3. Soit $k \in \mathbb{N}$. La suite $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée dans $(C^0([0,1], \mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ par M_k, et tous ses éléments sont M_{k+1}-lipschitziens, donc cette suite est équicontinue. D'après le Théorème d'Ascoli, il existe une suite extraite de $(f_n^{(k)})_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément.
4. Nous allons construire par récurrence une suite d'extractions $\varphi_0, \varphi_1, \ldots$ vérifiant la propriété suivante : pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $g_k \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ telle que la suite $(f^{(k)}_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g_k.

   Pour $k = 0$, une fonction g_0 et une extraction φ_0 nous sont donnés par la question précédente.
   Supposons que l'on a déjà construit $\varphi_0, \ldots, \varphi_k$. En appliquant le résultat de la question précédente à la suite $(f_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, on montre qu'il existe $g_{k+1} \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ et une extraction φ_{k+1} tels que la suite $(f^{(k+1)}_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_{k+1}(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers g_{k+1}.
   Posons maintenant $\varphi(n) = \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$. Sachant que pour toute extraction θ, on a $\theta(n) \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit :

   $$\varphi(n+1) \geq \varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_n(n+1) > \varphi(n)$$

   Ainsi φ est une extraction.
   De plus, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on peut écrire $\varphi = (\varphi_0 \circ \cdots \circ \varphi_k) \circ \psi_k$ où $\psi_k(n) = \varphi_{k+1} \circ \cdots \circ \varphi_n(n)$ est une extraction (on le montre de la même façon que pour φ).
   Ainsi pour tout $k \in \mathbb{N}$, la suite $(f^{(k)}_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite extraite de $(f^{(k)}_{\varphi_0\circ\cdots\circ\varphi_k(n)})_{n\in\mathbb{N}}$, elle converge donc uniformément vers g_k. On peut donc appliquer le Lemme 3 à la suite $(f_{\varphi(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire que cette suite converge dans E vers une fonction $f \in E$. Comme B est fermé, on a $f \in B$, ce qui finit de montrer que B est compact.
5. Par l'absurde, supposons qu'il existe une norme $\|.\|$ sur E définissant la même topologie que d. Soit $\overline{B}$ la boule unité fermée pour $\|.\|$. C'est un fermé. De plus, $\overline{B}$ est bornée : si O est un voisinage de 0, alors il existe $r > 0$ tel que $B_{\|.\|}(0, r) \subset O$, d'où $\dfrac{r}{2}\overline{B} \subset B_{\|.\|}(0, r) \subset O$.
   On déduit de la question précédente que $\overline{B}$ est compacte, et d'après le Théorème de Riesz E est de dimension finie, ce qui est absurde car E contient la famille $f_n : x \mapsto x^n$ qui est libre et infinie. Par conséquent, il n'existe pas de norme sur E définissant la même topologie que d.