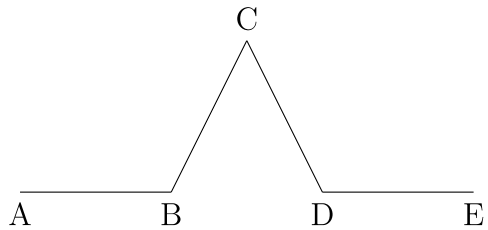
Exercice 1. Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E.

1. Si F est de codimension au moins 2, montrer que $E \setminus F$ est connexe.
2. Si F est de codimension 1, montrer que $E \setminus F$ a deux composantes connexes.

Exercice 2. L'exercice suivant propose une construction de la courbe « en flocon de neige », appelée aussi courbe de Von Koch. Il s'agit d'un exemple de courbe fractale, qui n'admet pas de tangentes.

On note $d_{\mathbb{R}^2}$ la distance euclidienne sur le plan. On considère les points $A = (0,0)$, $B = \left(\frac{1}{3}, 0\right)$, $C = \left(\frac{1}{2}, c\right)$, $D = \left(\frac{2}{3}, 0\right)$ et $E = (1,0)$ tels que $c > 0$ et $d_{\mathbb{R}^2}(B, C) = \frac{1}{3}$ (voir le dessin).



Soit X l'ensemble des courbes du plan qui joignent les points A et E :

$$X = \{\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \mid \gamma(0) = A,\ \gamma(1) = E,\ \gamma \text{ continue}\}.$$

Cet ensemble est muni de la distance uniforme, $d(\gamma_1, \gamma_2) = \sup_{t \in [0,1]} \{d_{\mathbb{R}^2}(\gamma_1(t), \gamma_2(t))\}$.

1. Montrer, à l'aide du cours, que (X, d) est complet.

Soit h homothétie du plan de centre $(0,0)$ et de rapport $1/3$. On remarque que h envoie le segment $[AE]$ sur le segment $[AB]$ et multiplie les distances par $1/3$: autrement dit, pour tous points M, N du plan, on a

$$d_{\mathbb{R}^2}(h(M), h(N)) = \frac{1}{3} d_{\mathbb{R}^2}(M, N).$$

On considère alors quatre transformations du plan, H_1, H_2, H_3, H_4, vérifiant les propriétés suivantes :

- $H_1 = h$;
- H_2 envoie le segment $[AE]$ sur le segment $[BC]$;
- H_3 envoie le segment $[AE]$ sur le segment $[CD]$;
- H_4 envoie le segment $[AE]$ sur le segment $[DE]$;
- H_1, H_2, H_3, H_4 multiplient les distances par $1/3$.

2. Construire H_2, H_3 et H_4 à l'aide de la transformation h et d'isométries (translations et rotations).

On considère maintenant la transformation $T : X \to X$ construite de la façon suivante : pour toute courbe $\gamma \in X$, la courbe $\delta = T(\gamma)$ est définie par

$$\delta(t) = \begin{cases} H_1(\gamma(4t)) \text{ pour } t \in [0, \frac{1}{4}] \\ H_2(\gamma(4t-1)) \text{ pour } t \in [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}] \\ H_3(\gamma(4t-2)) \text{ pour } t \in [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}] \\ H_4(\gamma(4t-3)) \text{ pour } t \in [\frac{3}{4}, 1] \end{cases}$$

3. Montrer que $T(\gamma)$ est bien un élément de X.
4. Soit γ_0 l'élément de X défini par $\gamma_0(t) = (t, 0)$. Dessiner γ_0 et $\gamma_1 = T(\gamma_0)$ (on pourra commencer par déterminer $\gamma_1(t)$ pour les valeurs $t = 0, 1/4, 1/2, 3/4, 1$).
5. Montrer que T est une transformation contractante, c'est-à-dire qu'elle vérifie l'hypothèse du théorème de point fixe de Picard, avec $k = 1/3$.
6. Expliquer pourquoi il existe une unique courbe $\gamma_\infty \in X$ telle que $T(\gamma_\infty) = \gamma_\infty$.
7. Dessiner (rapidement) $\gamma_2 = T \circ T(\gamma_0)$, $\gamma_3 = T \circ T \circ T(\gamma_0)$. Donner une majoration de la distance $d(\gamma_\infty, \gamma_3)$.

Exercice 3. On munit l'espace vectoriel $E = C^\infty([0;1], \mathbb{R})$ de la distance

$$d(f, g) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{1}{2^{k+1}} \min(1, \|f^{(k)} - g^{(k)}\|_\infty).$$

On dira qu'une partie B de E est bornée si, pour tout ouvert O contenant 0, il existe un réel λ tel que $\lambda B \subset O$. Dans la suite, B est un fermé borné de E.

1. Vérifier que d est une distance et montrer qu'elle est complète.
2. Montrer que
$$\forall k,\ \exists M_k,\ \forall f \in B,\ \sup \left| f^{(k)} \right| \leq M_k.$$
3. Soit f_n une suite d'éléments de B. En utilisant le théorème d'Ascoli, montrer qu'il existe une suite extraite de la suite $\left(f_n^{(k)}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ qui converge uniformément.
4. A l'aide d'un procédé diagonal, montrer qu'il existe une suite extraite $n(p)$ et une fonction $f \in B$ telle que, pour tout k, la suite $\left(f_{n(p)}^{(k)}\right)_{p \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers $f^{(k)}$. En déduire que B est compact.
5. Montrer que la topologie sur E définie par d ne peut pas être définie par une norme.