Exercice 1. Groupes topologiques

1. Soit H un sous-groupe de G, alors $G = H \bigsqcup (\bigcup_{g \notin H} gH)$. Par hypothèse, l'application $T_g : x \mapsto g \cdot x$ est un homéomorphisme (d'inverse $x \mapsto g^{-1} \cdot x$) pour tout $g \in G$. Si H est ouvert, on en déduit que $gH = (T_{g^{-1}})^{-1}(H)$ est ouvert pour tout $g \in G$, et donc que $\bigcup_{g \notin H} gH$ est ouvert en tant qu'union d'ouverts. Or il s'agit du complémentaire de H dans G. On en déduit bien que H est fermé dans G.

2. Si H est ouvert dans G alors $H = \overset{0}{H}$ et $1 \in H$ appartient bien à l'intérieur de H.

   Supposons que 1 soit intérieur à H. Il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(1, \varepsilon) \subset H$. Pour tout $x \in H$ on a alors $x \cdot B(1, \varepsilon) \subset H$, car H est stable par produit. Or $x = x \cdot 1$ appartient à $x \cdot B(1, \varepsilon)$ et $x \cdot B(1, \varepsilon)$ est un ouvert par continuité de l'application $g \mapsto x^{-1} \cdot g$. On a montré que tout point de H est intérieur à H, ce qui prouve que H est ouvert.

3. On suppose que G est connexe. Soit U un voisinage de l'unité, et soit G' le sous-groupe de G engendré par U. Alors, puisque $1 \in U \subset G'$, 1 est intérieur à G', ce qui prouve par la question 2 que G' est ouvert. Il découle de la question 1 que G' est également fermé. G' est ouvert, fermé et non-vide dans G qui est connexe, donc $G' = G$. On a montré que G est endendré par tout voisinage de l'unité.

4. On note G_0 la composante connexe de 1 dans G. L'image de G_0 par toute application continue φ est un connexe contenant $\varphi(1)$. Si φ est à valeurs dans G et $\varphi(1) = 1$ alors $\varphi(G_0)$ est un connexe de G contenant 1 d'où

   $$\varphi(G_0) \subset G_0.$$

   On en déduit en particulier que G_0 est stable par tout morphisme de groupe continu : $G \to G$.

   En considérant l'application $x \mapsto x^{-1}$ qui est continue sur G et envoie 1 sur 1, on déduit également de ce qui précéde que G_0 est stable par passage à l'inverse.

   Soit $x \in G_0$, alors $x^{-1} \in G_0$ et xG_0 est un connexe (par continuité de $y \mapsto x \cdot y$) contenant $x \cdot x^{-1} = 1$. On a donc $xG_0 \subset G_0$ pour tout $x \in G_0$. Ceci prouve que G_0 est stable par multiplication.

   Comme $1 \in G_0$, on en déduit que G_0 est un sous-groupe de G. Puisque une composante connexe est toujours fermée, on en déduit que G_0 est un sous-groupe fermé de G.

Exercice 2. Connexité

1. Soient a, b et $\varepsilon > 0$ comme dans l'énoncé. On pose

   $$C = \{x \in X | \exists a = a_1, \ldots, a_n = x \in X \ \ \forall i \ d(a_i, a_{i+1}) < \varepsilon\}$$

   C est non-vide car il contient a. C est ouvert car pour tout x dans C, $B(x, \varepsilon) \subset C$. Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'éléments de C qui converge vers $x \in X$. Alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x_{n_0} \in B(x, \varepsilon)$. Comme x_{n_0} appartient à C, il existe une suite de points $a = a_1, \dots, a_n = x_{n_0}$ avec $d(a_i, a_{i+1}) < \epsilon$. En posant $a_{n+1} = x$, on voit que x appartient à C ce qui prouve que $\underline{C \text{ est fermé.}}$

C est un ouvert fermé non-vide de X qui est connexe, donc $\underline{C = X}$. En particulier on a $b \in C$ ce qui prouve bien la propriété demandée.

Exercice 3. Opérateurs à noyau

1. Tf est bien définie en tout point comme intégrale d'une fonction continue sur un compact. L'application $(x,t) \mapsto k(t,x)f(t)$ est continue sur $[0,1]\times[0,1]$, donc d'après le théorème de continuité sous l'intégrale, Tf est continue sur $[0,1]$, c'est-à-dire, $Tf \in E$.
2. Si $f \in B_E(0,1)$ alors $N_\infty(Tf) \leq \sup\limits_{(t,x)\in[0,1]^2} |k(t,x)|$. Comme $\overline{B}_E(0, \sup\limits_{(t,x)\in[0,1]^2} |k(t,x)|)$ est fermé dans E on en déduit que l'adhérence de $T(B_E(0,1))$ est bornée dans E.
   On écrit pour $f \in B_E(0,1)$,
   $$|T_f(x) - T_f(y)| \leq \|f\|_\infty \int_0^1 |k(t,x) - k(t,y)|\mathrm{d}t \leq \int_0^1 |k(t,x) - k(t,y)|\mathrm{d}t$$
   Si g est limite uniforme d'une suite (T_{f_n}), on peut passer à la limite quand n tend vers $+\infty$ dans l'inégalité précédente et on obtient la même inégalité pour g. Par le théorème de Heine, la fonction continue k sur le compact $[0,1]\times[0,1]$ est uniformément continue donc pour tout $\epsilon > 0$, il existe η tel que $|k(t,x) - k(t,y)| < \epsilon$ dès que $|x-y| < \eta$. En particulier, pour tout $g \in \overline{T(B_E(0,1))}$ et pour tout x, y tel que $|x-y| < \eta$,
   $$|g(x) - g(y)| < \epsilon$$
   La partie $\overline{T(B_E(0,1))}$ est donc équicontinue, comme elle est également fermée et bornée, le théorème d'Ascoli assure qu'elle est compacte.
3. La boule unité fermée de $\ker(T - \lambda \cdot \mathrm{I}d)$ vaut
   $$\overline{B_E(0,1)} \bigcap \ker(T - \lambda \cdot \mathrm{I}d) = \frac{1}{\lambda}\overline{T(B_E(0,1))} \bigcap \ker(T - \lambda \cdot \mathrm{I}d)$$
   car on a $f = \frac{1}{\lambda}T(f)$ sur $\ker(T - \lambda \cdot \mathrm{I}d)$. Elle est fermée dans E car $\ker(T - \lambda \cdot \mathrm{I}d)$ est fermé. Comme $\overline{T(B_E(0,1))}$ est compact, la boule unité est compacte (c'est un fermé dans un compact). D'après le théorème de Riesz, on en déduit que $\ker(T - \lambda \cdot \mathrm{Id})$ est de dimension finie.

Exercice 4. Distance de Hausdorff

1. Soient $A, B, C \in \mathcal{F}$. On a bien $d_H(A,B) = \sup_{x\in X} |d(x,A) - d(x,B)| \geq 0$ et $d_H(B,A) = \|\varphi_B - \varphi_A\|_X = \|\varphi_A - \varphi_B\|_X = d_H(A,B)$. On a aussi l'inégalité triangulaire :
   $$\begin{aligned} d_H(A,B) = \|\varphi_A - \varphi_B\|_X &= \|(\varphi_A - \varphi_C) + (\varphi_C - \varphi_B)\|_X \\ &\leq \|\varphi_A - \varphi_C\|_X + \|\varphi_C - \varphi_B\|_X \\ &\leq d_H(A,C) + d_H(C,B) \end{aligned}$$

Supposons maintenant que $d_H(A,B) = 0$. Soit $x \in B$. Comme B est fermé, on a $d(x,B) = 0$. Or $d(x,A) = |d(x,A) - d(x,B)| \leq d_H(A,B) = 0$ d'où $d(x,A) = 0$ et $x \in A$ car A est fermé. On a donc montré $B \subset A$. Comme d_H est symétrique, on a aussi $d_H(B,A) = 0$ d'où $A \subset B$ et $A = B$, ce qui finit de montrer que d_H est une distance sur $\mathcal{F}$.

2. Soit $x \in X$. Montrons d'abord $f(x) \leq \varphi_A(x)$. Soit $y \in A = f^{-1}(\{0\})$. Comme A_n est compact (car fermé dans un compact), il existe $y_n \in A_n$ tel que $d(y, A_n) = d(y, y_n)$. On a $d(y, y_n) = |d(y, A_n) - f(y)| \leq \|\varphi_{A_n} - f\|_X \to 0$, autrement dit $y_n \to y$. Comme $y_n \in A_n$, on a $d(x, A_n) \leq d(x, y_n)$, d'où $f(x) = \lim d(x, A_n) \leq \lim d(x, y_n) = d(x,y)$. Ceci étant vrai pour tout $y \in A$, on a bien $f(x) \leq \varphi_A(x)$.

   Montrons maintenant que $\varphi_A(x) \leq f(x)$. Par compacité de A_n, on peut trouver $a_n \in A_n$ tel que $d(x, A_n) = d(x, a_n)$. Comme $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de X qui est compact, on peut considérer une suite extraite $a_{n(p)}$ qui converge vers $a \in X$. On a :

$$f(a) = \underbrace{f(a) - d(a, A_{n(p)})}_{\to 0} + \underbrace{d(a, A_{n(p)}) - d(a_{n(p)}, A_{n(p)})}_{|.| \leq d(a, a_{n(p)}) \to 0} + \underbrace{d(a_{n(p)}, A_{n(p)})}_{=0} \to 0$$

   Ainsi par unicité de la limite, on a $f(a) = 0$, i.e. $a \in A$. On a donc :

$$\varphi_A(x) \leq d(x,a) \leq d(x, a_{n(p)}) + d(a_{n(p)}, a) = \underbrace{\varphi_{A_{n(p)}}(x)}_{\to f(x)} + \underbrace{d(a_{n(p)}, a)}_{\to 0} \to f(x)$$

   On obtient donc $\varphi_A(x) \leq f(x)$.

3. Commençons par poser $E = \{\varphi_A : A \in \mathcal{F}\} \subset C^0(X)$. Comme X est compact, on a $\|\varphi_A\|_X \leq \mathrm{diam}(X) < \infty$ pour $A \in \mathcal{F}$, ainsi E est une partie bornée de $C^0(X)$. C'est aussi une partie fermée : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$ est telle que $\varphi_A \to f$ dans $C^0(X)$, alors la question précédente nous dit que $f = \varphi_A$ avec $A = f^{-1}(\{0\}) \in \mathcal{F}$ car f est continue. De plus, φ_A est 1-lipschitzienne pour tout $A \in \mathcal{F}$, ainsi E est une partie fermée, bornée et équicontinue de $C^0(X)$, et le théorème d'Ascoli nous dit que E est compacte.

   Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}^{\mathbb{N}}$. La suite $(\varphi_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite du compact E, donc il existe une suite extraite $(\varphi_{A_{n(p)}})_{p\in\mathbb{N}}$ et $A \in \mathcal{F}$ tels que $\varphi_{A_{n(p)}} \to \varphi_A$ dans $C^0(X)$, autrement dit $d_H(A_{n(p)}, A) \to 0$, ainsi $\mathcal{F}$ est compact.