Exercice 1. Le corps $\mathbb{C}$ est algébriquement clos

1. On écrit $P(z) = \sum a_n z^n$. Alors pour $z, h \in \mathbb{C}$,

$$P(z+h) = \sum a_n(z+h)^n = \sum a_n z^n + h \sum n a_n z^{n-1} + o(h) = P(z) + hP'(z) + o(h).$$

Donc P est différentiable et sa différentielle est $\mathrm{d}P_z(h) = P'(z)h$. Comme l'application $z \mapsto P'(z)$ est continue, P est C^1.

2. On note $d \geq 1$ le degré de P. L'inégalité triangulaire donne :

$$|P(z)| \geq |a_d||z|^d - \left| \sum_{n<d} a_n z^n \right|.$$

Comme $a_d \neq 0$, $|a_d||z|^d \to +\infty$ quand $|z| \to +\infty$. De plus,

$$\frac{|\sum_{n<d} a_n z^n|}{|a_d||z|^d} \leq \sum_{n<d} \frac{|a_n|}{|a_d|}|z|^{n-d},$$

et ce dernier terme tend vers 0 quand $|z| \to +\infty$.
Ainsi le terme $|a_d||z|^d$ l'emporte et on a bien $|P(z)| \to +\infty$ quand $|z| \to +\infty$.
Attention, il y avait une erreur d'énoncé : on regarde $P : \mathbb{C} \setminus P^{-1}(P(S)) \to \mathbb{C} \setminus P(S)$ et non pas : $P : \mathbb{C} \setminus S \to \mathbb{C} \setminus P(S)$ qui n'est pas bien définie (elle peut prendre des valeurs dans $P(S)$).
Soit $y_n = P(x_n)$ une suite convergeant vers $y \in \mathbb{C} \setminus P(S)$. Si la suite x_n n'était pas bornée, on trouverait une sous-suite $x_{\phi(n)}$ telle que $|x_{\phi(n)}| \to +\infty$, et d'après la question précédente, $|P(x_{\phi(n)})| \to +\infty$ ce qui est absurde. Donc la suite (x_n) est bornée, on peut en extraire une sous-suite $x_{\sigma(n)}$ convergeant vers $x \in \mathbb{C}$. Comme P est continue, $P(x) = \lim P(x_{\sigma(n)}) = \lim P(x_n) = y$. De plus, comme $y \in \mathbb{C} \setminus P(S)$, le point x n'appartient pas à $P^{-1}(P(S))$, donc $y \in P(\mathbb{C} \setminus P^{-1}(P(S)))$. On a montré que $P(\mathbb{C} \setminus P^{-1}(P(S)))$ est fermé dans $\mathbb{C} \setminus P(S)$.

3. Pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus P^{-1}(P(S))$, on a $P'(z) \neq 0$. Donc $\mathrm{d}P_z$ est inversible d'inverse $h \mapsto \frac{h}{P'(z)}$. Par le théorème d'inversion locale, P est un difféomorphisme local en z. En particulier, $P(\mathbb{C} \setminus P^{-1}(P(S)))$ contient $P(z)$ dans son intérieur. Comme cela est vrai pour tout point z, $P(\mathbb{C} \setminus P^{-1}(P(S)))$ est ouvert dans $\mathbb{C} \setminus P(S)$. Enfin, comme $P(S)$ est un nombre fini de points et que $\mathbb{C}$ privé d'un nombre fini de points est connexe, $\mathbb{C} \setminus P(S)$ est connexe. Ainsi l'ouvert-fermé $P(\mathbb{C} \setminus P^{-1}(P(S)))$ non-vide ($P' \neq 0$ car P n'est pas constant) est égal à $\mathbb{C} \setminus P(S)$. Les points de $P(S)$ ont également par définition un antécédent par P, donc on a bien montré que P est surjectif.

Exercice 2. Isométries infinitésimales : le cas C^2

1. Comme f est C^2, l'application $x \mapsto \mathrm{d}f_x$ est différentiable, donc p est différentiable et on a :

$$\mathrm{d}p_x(c) = \langle \mathrm{d}^2 f_x(a,c), \mathrm{d}f_x(b) \rangle + \langle \mathrm{d}f_x(a), \mathrm{d}^2 f_x(b,c) \rangle$$

2. D'après le lemme de Schwarz, $\mathrm{d}^2 f$ est symétrique. Donc g_x est symétrique par rapport aux deux dernières variables. D'autre part, comme $\mathrm{d}_x f$ est orthogonale, p est constante égale à $\langle a, b\rangle$, donc pour tout x, $\mathrm{d}p_x = 0$. Ainsi, g_x est antisymétrique par rapport aux deux premières variables. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} g_x(a,b,c) &= -g_x(b,a,c) = -g_x(b,c,a) = g_x(c,b,a) = g_x(c,a,b) \\ &= -g_x(a,c,b) = -g_x(a,b,c) \end{aligned}$$

D'où $g_x = 0$.

3. Comme $\mathrm{d}_x f$ est orthogonale pour tout x, $\mathrm{d}_x f$ est inversible pour tout x. Pour tout x, $g_x = 0$, donc pour tout a, b, c, $\langle \mathrm{d}^2 f_x(b,c), \mathrm{d}f_x(a)\rangle = 0$ et le vecteur $\mathrm{d}^2 f_x(b,c)$ est orthogonal à l'image de $\mathrm{d}_x f$ qui est E tout entier puisque $\mathrm{d}_x f$ est inversible. Ainsi pour tout x, $\mathrm{d}^2_x f = 0$. Comme f est C^2, la formule de Taylor avec reste intégral donne :

$$f(x) = f(0) + \mathrm{d}f_0(x) + \int_0^1 (1-t)\mathrm{d}^2 f_{tx}(x,x)\mathrm{d}t = f(0) + \mathrm{d}f_0(x)$$

Exercice 3. UNE APPLICATION DU LEMME DE HADAMARD

1. $D(1) = D(1 \times 1) = D(1) + D(1)$, donc $D(1) = 0$ puis $D(cst) = 0$ par linéarité.
2. On applique la règle de Leibniz : si $f, g \in \mathbb{C}^\infty(E, \mathbb{R})$ et $x \in E$,

$$\mathrm{d}(fg)_x(u(x)) = f(x)\mathrm{d}g_x(u(x)) + g(x)\mathrm{d}f_x(u(x))$$

3. Par linéarité de la différentielle D est linéaire. D'après le lemme de Hadamard, il existe $h \in C^\infty(E, \mathbb{R})$ tel que

$$f(x) - f(a) = g(x) - g(a) + (x-a)h(x)$$

avec $h(a) = 0$. Ainsi,

$$D(f-g)(a) = D(f(a) - g(a))(a) + h(a)D((x-a))(a) + 0 \times D(h)(a) = 0$$

Puis par linéarité de D, on a $D(f)(a) = D(g)(a)$.

4. Soit D une dérivation. Soit $a \in E$ et $f \in C^\infty(E, \mathbb{R})$. On introduit la fonction $g \in C^\infty(E, \mathbb{R})$ définie par $g(x) = \mathrm{d}f_a(x-a)$, elle vérifie $\mathrm{d}g_a = \mathrm{d}f_a$. Ainsi d'après la question précédente, $D(f)(a) = D(g)(a)$. Dans une base (e_i) de E, on peut exprimer $\mathrm{d}f_a$ en fonctions des dérivées partielles, si bien que :

$$g(x) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)(x_i - a_i).$$

Cela donne en utilisant les propriétés d'une dérivation :

$$D(f)(a) = \sum_i D\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\right)(a_i - a_i) + \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)D(x_i - a_i)(a) = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)D(x_i)(a).$$

En posant $u(a) = \sum_i D(x_i)(a_i)e_i$, on trouve bien $D(f)(a) = \mathrm{d}f_a(u(a))$. De plus, comme chaque fonction $D(x_i)$ est C^∞, u est bien C^∞, d'où le résultat.

Exercice 4. Isométries infinitésimales : le cas C^1

1. Une application orthogonale est inversible, donc d'après le théorème d'inversion locale, f est un difféomorphisme local en tout point $x \in E$. L'inégalité des accroissements finis donne

$$|f(x) - f(y)| \leq \sup |\mathrm{d}f||x - y| \leq |x - y|$$

car $|\mathrm{d}f_x| = 1$ pour tout $x \in E$. Si h est un inverse local de f, la même inégalité est valable pour h et si y est assez proche de x, on peut écrire :

$$|x - y| = |h(f(x)) - h(f(y))| \leq |f(x) - f(y)|$$

ce qui prouve le résultat.

2. On va se ramener au cas où γ est à valeurs réelles. On pose $e = \int_0^1 \gamma(x)\mathrm{d}x$. Par linéarité de l'intégrale,

$$\int_0^1 \langle \gamma(x), e \rangle \mathrm{d}x = \langle \int_0^1 \gamma(x)\mathrm{d}x, e \rangle = \langle e, e \rangle = 1.$$

Si $\langle \gamma(x_0), e \rangle = 1 - \epsilon < 1$ en un point x_0, alors sur un intervalle de longueur $\eta > 0$ contenant x_0, on a $\langle \gamma(x), e \rangle \leq 1 - \frac{\epsilon}{2}$, si bien que

$$\int_0^1 \langle \gamma(x), e \rangle \mathrm{d}x \leq \eta \left(1 - \frac{\epsilon}{2}\right) + (1 - \eta) = 1 - \frac{\eta\epsilon}{2} < 1$$

contradiction. Par conséquent, $\langle \gamma(x), e \rangle = 1$ pour tout x. Comme $\|\gamma(x)\| \leq 1$, on a $\gamma(x) = e$ pour tout x (par l'inégalité de Cauchy-Schwarz).
Comme f est C^1, on peut écrire :

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 \mathrm{d}f_{tx}(x)\mathrm{d}t.$$

Pour x proche de 0, d'après la question précédente, $|f(x) - f(0)| = |x|$. D'autre part, $|\mathrm{d}f_{tx}(x)| \leq |x|$. D'après ce que l'on vient de montrer, cela implique que la fonction $t \mapsto \mathrm{d}f_{tx}(x)$ est constante égale à $\mathrm{d}f_0(x)$. Ainsi, pour x proche de 0, $f(x) = f(0) + \mathrm{d}f_0(x)$. Ainsi $\mathrm{d}f$ est égale à $\mathrm{d}f_0$ près de x. En répétant le même raisonnement en un autre point que 0, on voit que $\mathrm{d}f$ est localement constant, donc constant car E est connexe et $\mathrm{d}f$ est continu. Ainsi,

$$f(x) = f(0) + \int_0^1 \mathrm{d}f_{tx}(x)\mathrm{d}t = f(0) + \int_0^1 \mathrm{d}f_0(x)\mathrm{d}t = f(0) + \mathrm{d}f_0(x).$$