Convergence de suites de fonctions holomorphes

M. Triestino, A. Vaugon

Corrigé

Exercice 1. (Théorème de Hurwitz) Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ ouvert connexe et $\{f_n\}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω qui converge uniformément sur les compacts vers une fonction holomorphe f.

a) On suppose que les f_n ne s'annulent pas dans Ω. Montrer que ou bien f ne s'annule pas, ou bien f est identiquement nulle.

b) On suppose maintenant que les f_n sont injectives. Montrer que f est soit injective soit constante. (Théorème de Hurwitz)

Solution.

a) Supposons que $f(a) = 0$ et f n'est pas identiquement nulle. Alors il existe $\epsilon > 0$ tel que f ne s'annule qu'en a sur $D_\epsilon(a)$. Par conséquent, il existe $c > 0$ tel que $|f| > c$ sur $S_\epsilon(a)$. Ainsi, pour n assez grand, on a $|f_n| > c$ sur $S_\epsilon(a)$. Par le principe du maximum appliqué à $\frac{1}{f_n}$, on a $|f_n| > c$ sur $D_\epsilon(a)$. On obtient donc une contradiction.

b) Soit $c \in \Omega$. Alors $f_n - f_n(c)$ ne s'annule pas sur $\Omega - \{c\}$. La suite converge uniformément sur tout compact de $\Omega - \{c\}$ vers $f - f(c)$. Par la question précédente, $f - f(c)$ est soit nulle (et f est constante) soit injective (et f ne prend qu'une fois la valeur $f(c)$). Donc f est soit constante soit injective.

Exercice 2. (Lemme de Kœnigs) Soit f une fonction holomorphe au voisinage de 0 telle que $f(0) = 0$ et $0 < |f'(0)| < 1$. On note f_n la n^e itérée de f et $\lambda = f'(0)$.

a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe r tel que

$$(|\lambda| - \varepsilon)^n |z| \leq \left|f_n(z)\right| \leq (|\lambda| + \varepsilon)^n |z|$$

pour tout $z \in D_r(0)$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$.

b) Montrer que si ε est assez petit, la série $\sum_{n\geq 1} |\varphi_{n+1} - \varphi_n|$ converge normalement en $D_r(0)$, où $\varphi_n = f_n/\lambda^n$. *Indication : on pourra utiliser l'estimation* $|f(z) - \lambda z| \leq C|z|^2$.

c) Montrer qu'il existe une fonction holomorphe φ au voisinage de 0 telle que $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ et qui vérifie l'équation fonctionnelle de Schröder

$$\varphi(f(z)) = \lambda \varphi(z).$$

Solution.

a) Comme $|\lambda| < 1$, on a $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D_r(0)$ avec r assez petit. On montre le résultat par récurrence sur n.

b) On a

$$|\varphi_{n+1} - \varphi_n| \leq \frac{C}{|\lambda|^{n+1}} |f_n(z)|^2$$

d'où

$$|\varphi_{n+1} - \varphi_n| \leq \frac{|z|^{2n}}{|\lambda|} \left(\frac{(|\lambda| + \epsilon)^2}{|\lambda|} \right)^n.$$

Pour ϵ assez petit, on a $\frac{(|\lambda|+\epsilon)^2}{|\lambda|} < 1$. Donc la série converge normalement sur $D_r(0)$.

c) On a $\lambda\varphi_{n+1} = \varphi_n \circ f$ et φ_{n+1} converge uniformément vers φ. La fonction φ vérifie l'équation de Schröder.

Exercice 3. Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbf{C}$, f une fonction holomorphe de $\Omega \longrightarrow \Omega$. On suppose que f admet un point fixe a. On note f_n la n^e itérée de f.

a) Calculer $f_n'(a)$. En déduire que $|f'(a)| \leq 1$.

b) On suppose $f'(a) = 1$.
   - On suppose que $f \neq Id$. Montrer qu'il existe une constante $c \neq 0$ et un entier $k \geq 2$ tel que pour tout n on ait
   $$f_n(z) = z + nc(z-a)^k + o\left((z-a)^k\right)$$
   au voisinage de a.
   - En déduire que f est l'identité.

c) On suppose que $|f'(a)| = 1$. Montrer qu'il existe une suite croissante p_n tel que $f'(a)^{p_n}$ converge vers 1. En déduire que $\{f_n\}$ admet une sous-suite $\{g_n\}$ qui converge vers l'identité uniformément sur tout compact.

d) Montrer que $|f'(a)| = 1$ si et seulement si f est un biholomorphisme de Ω.

e) Montrer que si $|f'(a)| < 1$ alors $\{f_n\}$ converge vers a uniformément vers tout compact.

Solution. Quitte à translater, on peut supposer $a = 0$.

a) Calculer $f_n'(0) = (f'(0))^n$. Posons $g_n(z) = \frac{f_n(z)}{z}$. On a $g_n(0) = (f'(0))^n$. Comme Ω est borné, f est borné. Soit $\epsilon > 0$ tel que l'adhérence de $D_\epsilon(0)$ soit contenue dans Ω. Alors g_n est holomorphe et uniformément borné sur $S_\epsilon(0)$ donc $g_n(0)$ aussi par le principe du maximum et $|f'(0)| \leq 1$.

b) • On montre le résultat par récurrence sur n.
   • On pose $g_n(z) = \frac{f_n(z)-z}{z^k}$, la fonction g_n est holomorphe et $g_n(0) = nc$. Soit $\epsilon > 0$ tel que l'adhérence de $D_\epsilon(0)$ soit contenue dans Ω. Alors g_n est uniformément borné sur $S_\epsilon(0)$ donc $g_n(0)$ aussi par le principe du maximum. On obtient un contradiction si c est non nul. Donc f est l'identité.

c) La suite g_n est bornée, on applique le théorème de Montel pour extraire une sous-suite convergeant sur tout compact (que l'on note toujours g_n) vers g. La suite g_n' converge uniformément vers g' sur tout compact. Par conséquent g vérifie les hypothèses de la question précédente et g est l'identité.

d) Si $|f'(0)| = 1$, on applique la question précédente pour construire $f_{\phi(n)}$ qui converge vers l'identité uniformément sur tout compact. Quitte à extraire, on peut suppose (par le théorème de Montel) que $f_{\phi(n)-1}$ converge uniformément vers g sur tout compact. On a alors $f \circ g = \mathrm{Id}$ et $g \circ f = \mathrm{Id}$ donc f est un biholomorphisme de Ω.

   Si f est un biholomorphisme de Ω, alors f^{-1} aussi. Par la question (a), on obtient $|f'(0)| \leq 1$ et $|(f^{-1})'(0)| \leq 1$ d'où $|f'(0)| = 1$.

e) On montre que de toute sous-suite, on peut extraire un sous-suite qui converge vers 0 uniformément sur tout compact. Soit $f_{\phi(n)}$ une sous-suite. Par le théorème de Montel on extrait une sous-suite convergeant vers g sur tout compact. Pour r assez petit, pour tout $n \in \mathbf{N}$ et tout $z \in D_r(0)$, on a

$$|f_n(z)| \leq (|\lambda| + \varepsilon)^n |z|.$$

   Par conséquent f_n converge uniformément vers 0 sur $D_r(0)$. Donc g est identiquement nulle sur Ω et on obtient le résultat voulu.

Exercice 4. Soit K un compact de $\mathbf{C}$. On suppose que l'ouvert $\mathbf{C} - K$ possède au moins une composante connexe bornée O. Si a est un point quelconque de O, montrer que la fonction $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ n'est pas uniformément approchable sur K par des fonctions polynomiales.

Solution. Soit P_n une suite de polynômes qui approche uniformément $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ sur K. Soit $\epsilon > 0$. Alors pour n assez grand, pour tout $z \in \partial O$, on a

$$|(z-a)P_n(z) - 1| < \epsilon.$$

Ceci contredit le principe du maximum pour $\epsilon < 1$ car $g(z) = (z-a)P_n(z) - 1$ est holomorphe et prend la valeur -1 en a.

Exercice 5. (Théorème $\frac{1}{4}$ de Kœbe) Si $f : D_1(0) \longrightarrow \mathbf{C}$ holomorphe vérifie $f(0) = 0$, le théorème de l'application ouverte dit que $f(D_1(0))$ contient un disque de centre l'origine. On cherche à obtenir un r uniforme pour une famille de telles fonctions.

a) Trouver une suite de fonctions f_n (qui vérifient les hypothèses) telle que $1/n \notin f_n(D_1(0))$. Calculer les $f_n'(0)$.

b) Soit $f_\varepsilon(z) = \varepsilon(e^{z/\varepsilon} - 1)$, montrer qu'on ne peut pas trouver un r pour cette famille de fonctions. Observer que $f_\varepsilon'(0) = 1$.

   On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions holomorphes injectives $f : D_1(0) \longrightarrow \mathbf{C}$ telles que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Le Théorème de Kœbe affirme que $r = 1/4$ convient et est optimale.

c) Soit f définie par

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

   Montrer que $f \in \mathcal{S}$ et que f est une fonction biholomorphe d'image $\mathbf{C} -]-\infty, -1/4]$. Calculer le développement en série de Laurent en 0.

d) (**Théorème de l'aire**) Soit $h : D_1(0) - \{0\} \longrightarrow \mathbf{C}$ holomorphe injective (on dit *univalente*) avec un pôle simple en 0, de la forme

$$h(z) = \frac{1}{z} + b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$$

   Calculer l'aire de la région $\mathbf{C} - h(D_r(0) - \{0\})$ ($r \in]0, 1[$) et en déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$.

e) Soit $f \in \mathcal{S}$. On écrit $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$. Montrer que la fonction $z \mapsto 1/\sqrt{f(z^2)}$ est bien définie comme fonction méromorphe impaire sur $D_1(0)$ avec un pôle simple en 0 et que son développement en 0 est donné par

$$\frac{1}{z} - \frac{a_2}{2} z + \sum_j c_j z^{2j+1}.$$

Montrer qu'une telle fonction est injective et utiliser le théorème de l'aire pour montrer que $|a_2| \leq 2$.

f) Soit $f \in \mathcal{S}$ et $w \notin f(D_1(0))$, on définit

$$g(z) := \frac{w f(z)}{w - f(z)}.$$

Montrer que $g \in \mathcal{S}$ et que son développement en 0 est donné par

$$g(z) = z + \left(a_2 + \frac{1}{w}\right) z^2 + \ldots$$

En déduire que $|w| \geq 1/4$.

g) Conclure.

Solution.

a) On prend $f_n(z) = \frac{z}{n}$. On a alors $f_n'(0) = \frac{1}{n}$.

b) Si $f_\varepsilon(z) = i\eta$ alors la partie réelle de z est $\varepsilon \log\left(\left|-1 + i\eta/\varepsilon\right|\right) \simeq \eta^2/2\varepsilon$. Donc pour ε assez petit $i\eta$ n'est pas atteint et il n'existe pas de r uniforme pour cette famille.

c) L'équation $f(z) = w$ équivaut à $wz^2 - (2w+1)z + w = 0$. Si $w = 0$, alors 0 est l'unique solution. On suppose maintenant $w \neq 0$ et on note z_+ et z_- les solutions de l'équation. Comme $z_+ z_- = 1$, f est injective. Pour obtenir la surjectivité, il reste à montrer que les racines ne peuvent pas être de module 1 pour $w \in \mathbf{C} -]-\infty, -1/4]$. Or, si les racines sont de module 1, elles sont conjugués et $z_+ + z_- = 2w + 1 \in \mathbf{R}$ d'où $w \in \mathbf{R}$. Pour obtenir des racines conjuguées, il faut que le discriminant soit négatif soit $w \in]-\infty, -1/4]$. On a bien $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ donc $f \in \mathcal{S}$. Enfin, $f(z) = \sum_n n z^n$.

d) On note $\Omega_r = \mathbf{C} - h(D_r(0) - \{0\})$ et $\gamma_r = h(S_r(0))$. On a

$$\iint_{\Omega_r} dxdy = \frac{1}{2}\int_{\gamma_r}(-ydx + xdy) = -\frac{1}{2i}\int_{\gamma_r} \bar{z}dz = -\frac{1}{2i}\int_{S_r(0)} \overline{h(z)} h'(z) dz = \pi\left(\frac{1}{r^2} - \sum_{n=1}^{\infty} r^{2n} n |b_n|^2\right).$$

En faisant tendre r vers 1, on obtient $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$.

e) On a $f(z^2) = z^2 f_1(z^2)$ et f_1 ne s'annule pas sur $D_1(0)$ par injectivité. Par conséquent $\log(f_1)$ est bien défini et $\frac{1}{\sqrt{f_1}}$ aussi. On pose $g(z) = \frac{1}{\sqrt{f(z^2)}} = \frac{1}{z\sqrt{f_1(z^2)}}$. La fonction est bien définie et a un pôle simple en 0. De plus, elle est impaire donc tous les termes de son développement en série sont impairs. On obtient la formule demandée par développement limité de f_1 au voisinage de 0. Montrons que g est injective. Si $g(z_1) = g(z_2)$ alors $\sqrt{f(z_1^2)} = \sqrt{f(z_2^2)}$ d'où $z_1 = \pm z_2$. Par imparité et comme g ne s'annule pas, on obtient $z_1 = z_2$. Donc g est injective.

Enfin, par le théorème de l'aire $\sum_{n=1}^{\infty}(2n+1)|c_n|^2 \leq 1$ d 'où $|a_2| \leq 2$.

f) On a $g(0) = 0$ et $g'(0) = 1$. Il reste à montrer que g est injective. Or $z \mapsto \frac{wz}{w-z}$ et f sont injectives donc g aussi. Donc $g \in \mathcal{S}$. Par la question précédente $\left|a_2 + \frac{1}{w}\right| \leq 2$ et $|a_2| \leq 2$ d'où $|w| \geq 1/4$.

g) Par la question précédente si $f \in \mathcal{S}$ et $w \notin f(D_1(0))$ alors $|w| \geq 1/4$. Donc $r = 1/4$ convient. Il est optimal par la question (c). Donc le théorème 1/4 de Kœbe est vérifié.