Convergence de suites de fonctions holomorphes

M. Triestino, A. Vaugon

Exercice 1. (Théorème de Hurwitz) Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ ouvert connexe et $\{f_n\}$ une suite de fonctions holomorphes sur Ω qui converge uniformément sur les compacts vers une fonction holomorphe f.

a) On suppose que les f_n ne s'annulent pas dans Ω. Montrer que ou bien f ne s'annule pas, ou bien f est identiquement nulle.

b) On suppose maintenant que les f_n sont injectives. Montrer que f est soit injective soit constante. (Théorème de Hurwitz)

Exercice 2. (Lemme de Kœnigs) Soit f une fonction holomorphe au voisinage de 0 telle que $f(0) = 0$ et $0 < |f'(0)| < 1$. On note f_n la n^e itérée de f et $\lambda = f'(0)$.

a) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, il existe r tel que

$$(|\lambda| - \varepsilon)^n |z| \leq \left| f_n(z) \right| \leq (|\lambda| + \varepsilon)^n |z|$$

pour tout $z \in D_r(0)$ et tout $n \in \mathbf{N}^*$.

b) Montrer que si ε est assez petit, la série $\sum_{n\geq 1} |\varphi_{n+1} - \varphi_n|$ converge normalement en $D_r(0)$, où $\varphi_n = f_n/\lambda^n$. *Indication : on pourra utiliser l'estimation* $|f(z) - \lambda z| \leq C|z|^2$.

c) Montrer qu'il existe une fonction holomorphe φ au voisinage de 0 telle que $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ et qui vérifie l'équation fonctionnelle de Schröder

$$\varphi(f(z)) = \lambda\varphi(z).$$

Exercice 3. Soit Ω un ouvert connexe borné de $\mathbf{C}$, f une fonction holomorphe de $\Omega \longrightarrow \Omega$. On suppose que f admet un point fixe a. On note f_n la n^e itérée de f.

a) Calculer $f_n'(a)$. En déduire que $|f'(a)| \leq 1$.

b) On suppose $f'(a) = 1$.
   - On suppose que $f \neq Id$. Montrer qu'il existe une constante $c \neq 0$ et un entier $k \geq 2$ tel que pour tout n on ait
   $$f_n(z) = z + nc(z-a)^k + o\left((z-a)^k\right)$$
   au voisinage de a.
   - En déduire que f est l'identité.

c) On suppose que $|f'(a)| = 1$. Montrer qu'il existe une suite croissante p_n tel que $f'(a)^{p_n}$ converge vers 1. En déduire que $\{f_n\}$ admet une sous-suite $\{g_n\}$ qui converge vers l'identité uniformément sur tout compact.

d) Montrer que $|f'(a)| = 1$ si et seulement si f est un biholomorphisme de Ω.

e) Montrer que si $|f'(a)| < 1$ alors $\{f_n\}$ converge vers a uniformément vers tout compact.

Exercice 4. Soit K un compact de $\mathbf{C}$. On suppose que l'ouvert $\mathbf{C} - K$ possède au moins une composante connexe bornée O. Si a est un point quelconque de O, montrer que la fonction $z \mapsto \frac{1}{z-a}$ n'est pas uniformément approchable sur K par des fonctions polynomiales.

Exercice 5. (Théorème $\frac{1}{4}$ de Kœbe) Si $f : D_1(0) \longrightarrow \mathbf{C}$ holomorphe vérifie $f(0) = 0$, le théorème de l'application ouverte dit que $f(D_1(0))$ contient un disque de centre l'origine. On cherche à obtenir un r uniforme pour une famille de telles fonctions.

a) Trouver une suite de fonctions f_n (qui vérifient les hypothèses) telle que $1/n \notin f_n(D_1(0))$. Calculer les $f_n'(0)$.

b) Soit $f_\varepsilon(z) = \varepsilon(e^{z/\varepsilon} - 1)$, montrer qu'on ne peut pas trouver un r pour cette famille de fonctions. Observer que $f_\varepsilon'(0) = 1$.

   On note $\mathcal{S}$ l'ensemble des fonctions holomorphes injectives $f : D_1(0) \longrightarrow \mathbf{C}$ telles que $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$. Le Théorème de Kœbe affirme que $r = 1/4$ convient et est optimale.

c) Soit f définie par

$$f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}.$$

   Montrer que $f \in \mathcal{S}$ et que f est une fonction biholomorphe d'image $\mathbf{C} -]-\infty, -1/4]$. Calculer le développement en série de Laurent en 0.

d) (**Théorème de l'aire**) Soit $h : D_1(0) - \{0\} \longrightarrow \mathbf{C}$ holomorphe injective (on dit *univalente*) avec un pôle simple en 0, de la forme

$$h(z) = \frac{1}{z} + b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \ldots$$

   Calculer l'aire de la région $\mathbf{C} - h(D_r(0) - \{0\})$ ($r \in]0, 1[$) et en déduire que $\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leq 1$.

e) Soit $f \in \mathcal{S}$. On écrit $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \ldots$. Montrer que la fonction $z \mapsto 1/\sqrt{f(z^2)}$ est bien définie comme fonction méromorphe impaire sur $D_1(0)$ avec un pôle simple en 0 et que son développement en 0 est donné par

$$\frac{1}{z} - \frac{a_2}{2} z + \sum_j c_j z^{2j+1}.$$

   Montrer qu'une telle fonction est injective et utiliser le théorème de l'aire pour montrer que $|a_2| \leq 2$.

f) Soit $f \in \mathcal{S}$ et $w \notin f(D_1(0))$, on définit

$$g(z) := \frac{w f(z)}{w - f(z)}.$$

   Montrer que $g \in \mathcal{S}$ et que son développement en 0 est donné par

$$g(z) = z + \left(a_2 + \frac{1}{w}\right) z^2 + \ldots$$

   En déduire que $|w| \geq 1/4$.

g) Conclure.