Lemme de Schwarz

M. Triestino, A. Vaugon

Corrigé

Exercice 1. Lemme de Schwarz.

1. Soit $f : D_1(0) \longrightarrow D_1(0)$ une fonction holomorphe telle que $f(0) = 0$.
   (a) Montrer que la fonction
   $$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{sinon} \end{cases}$$
   vérifie $\sup_{D_r(0)} |g| \leq \frac{1}{r}$ pour tout $r < 1$.
   (b) En déduire les inégalités $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D_1(0)$ et $|f'(0)| \leq 1$.
   (c) On suppose qu'il existe $z_0 \in D_1(0)$ tel que $|g(z_0)| = 1$. Montrer que f est une rotation centrée en 0.
2. Soit $f : D_1(0) \longrightarrow D_1(0)$ une fonction holomorphe propre (*i.e.* $\lim_{|z|\to 1} |f(z)| = 1$) telle que $f^{-1}(0) = \{0\}$ et 0 est le seul point critique de f. Montrer qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ et $\theta \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ tels que $f(z) = e^{2i\pi\theta} z^n$.
3. Soit $w \in D_1(0)$; on définit $T_w : D_1(0) \longrightarrow \mathbf{C}$ par
   $$T_w(z) = \frac{w - z}{1 - \overline{w}z}.$$
   (a) Montrer que T_w est un biholomorphisme de $D_1(0)$ qui échange 0 et w.
   (b) Montrer qu'il y a un seul biholomorphisme qui échange 0 et w. En particulier T_w est d'ordre 2.
4. Soit $\varphi \in \mathrm{Aut}(D_1(0))$. Montrer qu'il existe $w \in D_1(0)$, $\theta \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, tels que $\varphi(z) = e^{2i\pi\theta} T_w(z)$.
5. Soit $\varphi \in \mathrm{Aut}(D_1(0) - \{0\})$. Montrer que φ est une rotation.

Solution.

1. (a) La fontion g est holomorphe. Soit $r \in]0, 1[$. Si $|z| = r$ alors $|g(z)| \leq \frac{1}{r}$. Par le principe du maximum, on obtient $\sup_{D_r(0)} |g| \leq \frac{1}{r}$.
   (b) Soit $z \in D_1(0)$. Pour tout $r \in]|z|, 1[$, on a $|f(z)| \leq \frac{1}{r}|z|$. En faisant tendre r vers 1, on obtient $|f(z)| \leq |z|$. De plus, $f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{f(z)}{z}$. Par conséquent $|f'(0)| \leq 1$.
   (c) Soit $z_0 \in D_1(0)$ tel que $|g(z_0)| = 1$. Par la question précédente $|g(z)| \leq 1$ sur $D_1(0)$. Donc, par le principe du maximum, g est constante de module 1 sur $D_1(0)$. On a donc $f(z) = e^{2i\pi\theta} z$ et f est une rotation centrée en 0.
2. Soit n l'ordre de f en 0. On pose
   $$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z^n} & \text{si } z \neq 0 \\ n! f^{(n)}(0) & \text{si } z = 0 \end{cases}$$
   Comme f ne s'annule qu'en 0, g est non nulle sur $D_1(0)$. Comme dans la question précédente, on montre que $|g| \leq 1$ sur $D_1(0)$. Comme f est propre $\lim_{|z|\to 1} |g(z)| = 1$. Par le principe du maximum appliqué à $\frac{1}{g}$, g est constante et $f(z) = e^{2i\pi\theta} z^n$.
3. (a) T_w est un biholomorphisme de $\mathbf{C} \setminus \left\{\frac{1}{\overline{w}}\right\}$ dans $\mathbf{C} \setminus \left\{\frac{1}{\overline{w}}\right\}$ d'inverse T_w. De plus $T_w(S_1(0)) = S_1(0)$ donc T_w échange les composantes connexes de $\mathbf{C} \setminus \left\{\frac{1}{\overline{w}}\right\}$. Comme $T_w(0) = w$, T_w est un biholomorphisme de $D_1(0)$.
   (b) Soit f un biholomorphisme qui échange 0 et $w \neq 0$. Alors $g = f \circ T_w$ est un biholomorphisme de $D_1(0)$ qui fixe 0 et w. On a $|g(w)| = |w|$. On applique la question précédente, g est une rotation qui fixe w donc c'est l'identité et $f = T_w^{-1} = T_w$.
4. Soit $\varphi \in \mathrm{Aut}(D_1(0))$. Alors pour $w = \varphi(0)$, l'application $\varphi \circ T_w$ est un biholomorphisme de $D_1(0)$ qui fixe 0. Donc c'est une rotation. Par conséquent $\varphi \circ T_w(z) = e^{2i\pi\theta} z$ d'où $\varphi(z) = e^{2i\pi\theta} T_w(z)$.
5. Soit $\varphi \in \mathrm{Aut}(D_1(0) - \{0\})$. La singularité en 0 est effaçable, on obtient $\overline{\varphi} \in \mathrm{Aut}(D_1(0))$ qui fixe 0 et on applique la question précédente.

Exercice 2.

1. On définit $\Phi : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$. Montrer que Φ est une application biholomorphe de $\mathrm{H} := \{\Im\mathrm{m}\, z > 0\}$ dans $D_1(0)$.
2. Soit $f : D_1(0) \longrightarrow \mathbf{H} = \{\Im\mathrm{m}\, z > 0\}$ une fonction holomorphe telle que $f(0) = i$. Montrer que pour tout $z \in D_1(0)$
$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}$$
et en plus $|f'(0)| \leq 2$.

Solution.

1. Φ est un biholomorphisme de $\mathbf{C} \setminus \{i\}$ dans $\mathbf{C} \setminus \{1\}$ d'inverse $z \mapsto i\frac{z+1}{z-1}$. De plus $\Phi(\mathbb{R}) = S^1 \setminus \{i\}$ et $\Phi(i) = 0$. Par conséquent Φ est un biholomorphisme de $\mathbf{H}$ dans $D_1(0)$.
2. Soit $f : D_1(0) \longrightarrow \mathbf{H}$ telle que $f(0) = i$. Alors $g = \Phi \circ f$ est holomorphe de $D_1(0)$ dans $D_1(0)$ qui fixe 0. Par le lemme de Schwarz
$$\left|\frac{f(z)-i}{f(z)+1}\right| \leq |z|.$$
Par inégalité triangulaire, on obtient
$$|f(z)| - 1 \leq |z|(|f(z)| + 1)$$
et
$$-|f(z)| + 1 \leq |z|(|f(z)| + 1)$$
D'où
$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leq |f(z)| \leq \frac{1+|z|}{1-|z|}.$$
De plus $|g'(0)| \leq 1$. Or $g'(0) = f'(0)\Phi'(i)$ et $\Phi'(i) = -\frac{i}{2}$. Ainsi $|f'(0)| \leq 2$.

Exercice 3. Lemme de Schwarz-Pick.

1. Soit d la fonction définie sur $D_1(0) \times D_1(0)$ par
$$d(w,z) := \frac{|w-z|}{|1-\overline{w}z|},$$
soit $f : D_1(0) \longrightarrow D_1(0)$ holomorphe. Montrer que pour tous $w, z \in D_1(0)$,
$$d(f(w), f(z)) \leq d(w,z),$$
avec égalité si et seulement si f est biholomorphe.
Montrer que $f : D_1(0) \longrightarrow D_1(0)$ est biholomorphe si et seulement s'il existe $w, z \in D_1(0)$ distincts tels que
$$d(f(w), f(z)) = d(w,z).$$
2. Soit $f : D_1(0) \longrightarrow D_1(0)$ holomorphe et $z \in D_1(0)$. Montrer que
$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leq \frac{1}{1-|z|^2}$$
et que s'il existe z tel qu'on a l'égalité, alors on a l'égalité pour tout point en $D_1(0)$ et en fait f est biholomorphe.

Solution.

1. Soit $g_w = T_{f(w)} \circ f \circ T_w$. On a $g_w(0) = 0$. Par le lemme de Schwarz, pour tout $z \in D_1(0)$, on a
$$|g_w(z)| \leq |z|.$$
Par conséquent, pour tout $z \in D_1(0)$,
$$|T_{f(w)} \circ f(z)| \leq |T_w(z)|$$
car $T_w^2 = \mathrm{Id}$. On obtient donc $d(f(w), f(z)) \leq d(w,z)$.
Si est f est biholomorphe alors g_w aussi et on applique l'exercice 1 pour obtenir $|g_w(z)| = |z|$ et donc $d(f(w), f(z)) = d(w,z)$ pour tous $w, z \in D_1(0)$.
Si $d(f(w), f(z)) = d(w,z)$ pour tous $w, z \in D_1(0)$, alors $|g_w(z)| = |z|$ et g_w est une rotation. Donc f est un biholomorphisme.
Si maintenant $d(f(w_0), f(z_0)) = d(w_0, z_0)$ alors g_{w_0} est une rotation (exercice 1) et f est un biholomorphisme.

2. On reprend les notations de la question précédente. On a

$$g'_w(0) = f'(w)\frac{1 - |w|^2}{1 - |f(w)|^2}.$$

Par le lemme de Schwarz, $|g'_w(0)| \leq 1$ et s'il y a égalité g_w est une rotation. On obtient donc le résultat voulu.

Exercice 4. Soit $f : D_1(0) \longrightarrow D_1(0)$ une fonction holomorphe, continue jusqu'au bord. On suppose que f s'annule en $a_1, \ldots, a_n \in D_1(0)$ avec multiplicité $m_1, \ldots, m_n$. Montrer qu'on a $|f(0)| \leq |a_1|^{m_1} \cdots |a_n|^{m_n}$.

Indication : de première approche, on voudrait écrire $f(z) = (z - a_1)^{m_1} \cdots (z - a_n)^{m_n} g(z)$ avec $g : D_1(0) \longrightarrow \mathbf{C}$ holomorphe, mais cela n'amène nulle part. On pourra alors essayer avec les fonctions T_{a_i}.

Solution. On écrit $f(z) = (T_{a_1}(z))^{m_1} \cdots (T_{a_n}(z))^{m_n} g(z)$. La fonction g est holomorphe et ne s'annule pas. De plus $\sup_{|z|=1} |g(z)| \leq 1$. Donc $|g(0)| \leq 1$ par le principe du maximum. Comme $T_{a_i}(0) = a_i$, on obtient l'inégalité cherchée.