# Lemme de Schwarz

M. Triestino, A. Vaugon

**Exercice 1. Lemme de Schwarz.**

1. Soit $f : D_1(0) \longrightarrow D_1(0)$ une fonction holomorphe telle que $f(0) = 0$.
   (a) Montrer que la fonction
   $$g(z) := \begin{cases} \frac{f(z)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{sinon} \end{cases}$$
   vérifie $\sup_{D_r(0)} |g| \leq \frac{1}{r}$ pour tout $r < 1$.
   (b) En déduire les inégalités $|f(z)| \leq |z|$ pour tout $z \in D_1(0)$ et $|f'(0)| \leq 1$.
   (c) On suppose qu'il existe $z_0 \in D_1(0)$ tel que $|g(z_0)| = 1$. Montrer que $f$ est une rotation centrée en 0.
2. Soit $f : D_1(0) \longrightarrow D_1(0)$ une fonction holomorphe propre (*i.e.* $\lim_{|z|\to 1} |f(z)| = 1$) telle que $f^{-1}(0) = \{0\}$ et 0 est le seul point critique de $f$. Montrer qu'il existe $n \in \mathbf{N}$ et $\theta \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ tels que $f(z) = e^{2i\pi\theta} z^n$.
3. Soit $w \in D_1(0)$ ; on définit $T_w : D_1(0) \longrightarrow \mathbf{C}$ par
   $$T_w(z) = \frac{w - z}{1 - \overline{w}z}.$$
   (a) Montrer que $T_w$ est un biholomorphisme de $D_1(0)$ qui échange 0 et $w$.
   (b) Montrer qu'il y a un seul biholomorphisme qui échange 0 et $w$. En particulier $T_w$ est d'ordre 2.
4. Soit $\varphi \in \mathrm{Aut}(D_1(0))$. Montrer qu'il existe $w \in D_1(0)$, $\theta \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$, tels que $\varphi(z) = e^{2i\pi\theta} T_w(z)$.
5. Soit $\varphi \in \mathrm{Aut}(D_1(0) - \{0\})$. Montrer que $\varphi$ est une rotation.

**Exercice 2.**

1. On définit $\Phi : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$. Montrer que $\Phi$ est une application biholomorphe de $\mathrm{H} := \{\Im\mathrm{m}\, z > 0\}$ dans $D_1(0)$.
2. Soit $f : D_1(0) \longrightarrow \mathbf{H} = \{\Im\mathrm{m}\, z > 0\}$ une fonction holomorphe telle que $f(0) = i$. Montrer que pour tout $z \in D_1(0)$
   $$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \leq |f(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$
   et en plus $|f'(0)| \leq 2$.

**Exercice 3. Lemme de Schwarz-Pick.**

1. Soit $d$ la fonction définie sur $D_1(0) \times D_1(0)$ par

$$d(w, z) := \frac{|w - z|}{|1 - \overline{w}z|},$$

soit $f : D_1(0) \longrightarrow D_1(0)$ holomorphe. Montrer que pour tous $w, z \in D_1(0)$,

$$d(f(w), f(z)) \leq d(w, z),$$

avec égalité si et seulement si $f$ est biholomorphe.
Montrer que $f : D_1(0) \longrightarrow D_1(0)$ est biholomorphe si et seulement s'il existe $w, z \in D_1(0)$ distincts tels que

$$d(f(w), f(z)) = d(w, z).$$

2. Soit $f : D_1(0) \longrightarrow D_1(0)$ holomorphe et $z \in D_1(0)$. Montrer que

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

et que s'il existe $z$ tel qu'on a l'égalité, alors on a l'égalité pour tout point en $D_1(0)$ et en fait $f$ est biholomorphe.

**Exercice 4.** Soit $f : D_1(0) \longrightarrow D_1(0)$ une fonction holomorphe, continue jusqu'au bord. On suppose que $f$ s'annule en $a_1, \ldots, a_n \in D_1(0)$ avec multiplicité $m_1, \ldots, m_n$. Montrer qu'on a $|f(0)| \leq |a_1|^{m_1} \cdots |a_n|^{m_n}$.

*Indication : de première approche, on voudrait écrire* $f(z) = (z - a_1)^{m_1} \cdots (z - a_n)^{m_n} g(z)$ *avec* $g : D_1(0) \longrightarrow \mathbf{C}$ *holomorphe, mais cela n'amène nulle part. On pourra alors essayer avec les fonctions* $T_{a_i}$.