Singularités et calcul d'intégrales

M. Triestino, A. Vaugon

Exercice 1. Classifier les singularités isolées des fonctions suivantes et donner l'ordre des pôles.

$$\frac{z^4}{(z^4+16)^2}, \qquad \exp(1/z), \qquad \frac{1-\cos z}{\sin z}, \qquad \frac{z^2-\pi^2}{\sin z}, \qquad \frac{1}{e^z-1}-\frac{1}{z-2\pi i}, \qquad \frac{1}{\cos(1/z)}.$$

Exercice 2. Montrer qu'une fonction f méromorphe sur D ayant un nombre fini de pôles peut s'écrire comme la somme d'une fraction rationnelle ayant les mêmes singularités que f et d'une fonction homolomorphe sur D.

Exercice 3.

a) Soit Ω ouvert connexe, $w \in \Omega$, $f : \Omega - \{w\} \longrightarrow \mathbf{C}$ holomorphe injective.
Montrer que w est une singularité soit effaçable, soit d'ordre 1 (pour f). Montrer que si w est une singularité effaçable, alors le prolongement holomorphe de f à Ω est encore injectif.

b) Soit $f : \mathbf{C} - \{0\} \longrightarrow \mathbf{C} - \{0\}$ holomorphe injective. Montrer que $f = az^{\pm 1}$ avec $a \neq 0$. En particulier, toutes les applications holomorphes injectives définies sur $\mathbf{C} - \{0\}$ sont surjectives.
En déduire que si $f : \mathbf{C} - \{0\} \longrightarrow \mathbf{C}$ est holomorphe injective alors son image est égale à $\mathbf{C} - \{w\}$ pour un certain $w \in \mathbf{C}$.

c) Soit Ω un ouvert connexe borné sans composante de bord isolée, $w \in \Omega$. Montrer que les automorphismes (biholomorphes) de $\Omega - \{w\}$ sont égaux aux automorphismes de Ω qui fixent w.

Exercice 4. Soit $R = P/Q \in \mathbf{C}(z)$ une fonction rationnelle avec $\deg Q \geq \deg P + 2$. Montrer que

$$\sum_{a\in\mathbf{C}} \text{rés}_a R = 0.$$

Exercice 5. Soit $R = P/Q \in \mathbf{R}(X,Y)$ une fraction rationnelle telle que $Q(x,y) \neq 0$ si $x^2+y^2 = 1$. On peut alors considérer

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta, \sin\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

a) Vérifier que

$$\int_0^{2\pi} R(\cos\theta,\sin\theta)\,\mathrm{d}\theta = \int_{\partial D_1(0)} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2i}\right)\frac{\mathrm{d}z}{iz}.$$

b) Soient a, b réels avec $a > |b|$, calculer

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a + b\cos\theta}.$$

Exercice 6.

a) Soient $p, q \in \mathbf{R}$ tels que le polynôme $x^2 + px + q$ n'ait pas de racines réelles. Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + px + q}.$$

b) Montrer que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+1}} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi = \frac{(2n)!}{4^n (n!)^2}\pi.$$

c) En considérant un secteur circulaire, montrer que si $n \in \mathbf{N}$ et $\alpha \in \mathbf{R}$ sont tels que $n > \alpha + 1 > 0$, alors

$$\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha \,\mathrm{d}x}{1 + x^n} = \frac{\pi}{n}\left(\sin\left(\frac{\alpha+1}{n}\pi\right)\right)^{-1}.$$

d) Calculer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}\,\mathrm{d}x}{x^2 + x + 1}.$$

Exercice 7. Soit f une fonction holomorphe sur $\mathbf{C} - \{a_1, \dots, a_k\}$ et $a_j \notin \mathbf{Z}$. On suppose qu'il existe $M, R > 0$ tels que $|z^2 f(z)| \le M$ si $|z| > R$. On pose

$$g(z) := \pi \operatorname{cotg}(\pi z) f(z), \quad h(z) := \frac{\pi}{\sin(\pi z)} f(z).$$

a) Montrer que les séries $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n)$ et $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n f(n)$ convergent.

b) Calculer $\text{rés}_n g$ et $\text{rés}_n h$ pour tout $n \in \mathbf{Z}$.

c) Montrer que si $n \ge \max\{R, |a_j|\}$ alors

$$\left|\int_{\partial Q_n} g(z)\,\mathrm{d}z\right| \le 8\pi(2n+1)\frac{M}{n^2}, \quad \left|\int_{\partial Q_n} h(z)\,\mathrm{d}z\right| \le 4(2n+1)\frac{M}{n^2},$$

où Q_n est le carré défini par

$$Q_n := \left\{\max\{|\mathfrak{R}\text{é}\, z|, |\mathfrak{I}\text{m}\, z|\} \le n + \frac{1}{2}\right\}.$$

d) Utiliser la formule des résidus pour montrer que

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(n) = -\sum_{j=1}^{k} \text{rés}_{a_j} g \quad \sum_{n\in\mathbf{Z}} (-1)^n f(n) = -\sum_{j=1}^{k} \text{rés}_{a_j} h$$

e) En déduire que si $a \in \mathbf{C} - \mathbf{Z}$, alors

$$\sum_{n\in\mathbf{Z}} \frac{1}{a^2 - n^2} = \frac{\pi}{a}\operatorname{cotg}(\pi a)$$

et donc

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a^2 - n^2} = \frac{\pi}{2a}\operatorname{cotg}(\pi a) - \frac{1}{2a^2}.$$

f) De même, calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Attention : la fonction $1/z^2$ possède un pôle en 0.

Exercice 8.

1. Soit h une fonction méromorphe sur $\mathbf{C}$ ayant un pôle simple en $\alpha \in \mathbf{C}$. On note γ_r le chemin $t \longrightarrow \alpha + re^{it}$, $0 \le t \le \pi$.

   a) Etablir :

   $$\lim_{r \to 0} \int_{\gamma_r} h(z)\, dz = i\pi \, \text{rés}(h, \alpha).$$

   b) Calculer l'intégrale :

   $$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x.$$

   c) Calculer la transformée de Fourier de $x \mapsto \dfrac{\sin x}{x}$.

2. Pour $\alpha \in]-1, 1[$, calculer l'intégrale :

   $$I = \int_0^{+\infty} \frac{x^\alpha \, \ln x}{x^2 - 1} \, dx.$$

Exercice 9. Considérer la région $\Omega_Y := \{0 < \Re\text{é}\, z < 1,\ 0 < \Im\text{m}\, z < Y\}$ pour $Y \to \infty$.

a) Montrer que

$$\int_0^1 \log(1 - e^{2\pi i x}) \, \mathrm{d}x = 0.$$

b) En déduire l'égalité $\int_0^1 \log \sin(\pi x) \, \mathrm{d}x = -\log 2$.