Applications des formules de Cauchy - Séries de Laurent

M. Triestino, A. Vaugon

Exercice 1. (Formule de Pompeiu) Soit K un compact du plan complexe, admettant un bord ∂K de classe C^1 par morceaux. On désigne par $\mathrm{d}\lambda(z) = \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$ la mesure de Lebesgue sur $\mathbf{C} \simeq \mathbf{R}^2$.

1. Montrer que pour tout fonction $f : K \to \mathbf{C}$ de classe C^1, on a
$$\int_{\partial K} f(z)\, \mathrm{d}z = 2i \iint_K \frac{\partial f}{\partial \bar{z}}\, \mathrm{d}\lambda(z).$$
2. En déduire que pour toute z dans l'intérieur de K, on a
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f(w)}{w-z}\, \mathrm{d}w - \frac{1}{\pi} \iint_K \frac{1}{w-z} \frac{\partial f}{\partial \overline{w}}\, \mathrm{d}\lambda(w) \quad \text{(Formule de Pompeiu)}$$

Exercice 2. (Théorème de Morera)
Soit f une fonction continue sur un ouvert Ω de $\mathbf{C}$. On suppose que $\int_{\partial T} f(z) dz = 0$ pour tout triangle T inclus dans Ω.

1. Montrer que f est holomorphe sur Ω.
2. (Application) : Soit $\mathcal{D}$ l'intersection d'une droite affine réelle et de Ω. Montrer que si $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ est holomorphe sur $\Omega \setminus \mathcal{D}$ et continue sur Ω alors f est holomorphe sur Ω.

Exercice 3. (Formule de Schwarz) Soit $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ une fonction holomorphe. On suppose $0 \in \Omega \setminus \partial\Omega$. Soit $D_r(0)$ un disque compactement contenu en Ω. Montrer que pour tout $z \in D_r(0)$ on a
$$\overline{f}(0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(0)} \frac{\overline{f}(w)}{w-z}\, \mathrm{d}w.$$
En déduire la *formule de Schwarz* :
$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D_r(0)} \frac{\Re\text{é}\, f(w)}{w} \frac{w+z}{w-z}\, \mathrm{d}w + i \Im\text{m}\, f(0), \quad \text{pour tout } z \in D_r(0).$$

Exercice 4. Développer en série de Laurent la fonction
$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)}$$
sur les ouverts $D_1(0)$, $C_{1,2}(0)$ et $C_{2,\infty}(0)$, où
$$C_{r,R}(z_0) := \{z \in \mathbf{C} \,:\, r < |z - z_0| < R\}.$$

Exercice 5.

1. Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ et $w \in \Omega$. On suppose que $f : \Omega \backslash \{w\} \longrightarrow \mathbf{C}$ est une fonction holomorphe. Soit $\delta > 0$ tel que $\overline{D(w,\delta)} \subset \Omega$. On pose

$$R = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial D(w,\delta)} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

Montrer que R ne dépend pas du choix de δ et

$$\int_{\partial D(w,\delta)} \left(f(z) - \frac{R}{z-w} \right) \mathrm{d}z = 0.$$

2. Soient $w, v \in \mathbf{C}$. Calculer R relatif à w pour Ω un petit disque autour de w et $f(z) = \dfrac{e^z}{(z-w)(z-v)}$