Logarithme - Formule de Cauchy - Indice - Compacts à bord C^1

M. Triestino, A. Vaugon

Exercice 1.
Soit $\Omega \subset \mathbf{C} - \{0\}$. Un logarithme sur Ω est une fonction continue $f : \Omega \longrightarrow \mathbf{C}$ vérifiant $\exp \circ f = \mathrm{id}_\Omega$.

1. Montrer qu'il n'existe pas de fonction logarithme continue sur le cercle unité.
2. Quel est le lien entre les différents logarithmes sur un ouvert connexe donné ?
3. Montrer que tout logarithme f sur un ouvert de $\mathbf{C}$ est holomorphe de dérivée $f'(z) = 1/z$.
   Réciproquement, monter que toute fonction holomorphe sur un ouvert connexe Ω, de dérivée $1/z$, est un logarithme sur Ω à constante additive près.
4. Montrer qu'on peut définir une fonction logarithme sur $\mathbf{C}$ privé d'une demi-droite issue de 0 quelconque. On appelle détermination principale, et on note Log, la branche du logarithme définie sur $\Omega = \mathbf{C} -]-\infty; 0]$ s'annulant au point 1.
   (a) Calculer $\mathrm{Log}(re^{it})$ en fonction de $r > 0$ et $t \in]-\pi; \pi[$. Quelle est la restriction de Log à $]0; +\infty[$?
   (b) Montrer que la détermination principale du logarithme est développable en série entière autour de 1 et que $\mathrm{Log}(1+z) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} z^n}{n}$.
   (c) Déterminer $\Omega' := \mathrm{Log}(\Omega)$. Dessiner l'image par l'exponentielle du quadrillage en lignes horizontales et verticales de Ω'.
5. Pour $z \in \mathbf{C} -]-\infty; 0]$ et $\alpha > 0$, on pose $z^\alpha := \exp(\alpha \operatorname{Log} z)$. Montrer que cette définition coïncide avec celle connue sur $]0; +\infty[$, et que $|z^\alpha| = |z|^\alpha$. Vérifier que si $k \in \mathbf{N}$, $(z^{\frac{1}{k}})^k = z$.
6. Soit f une fonction holomorphe sur un disque D, que ne s'annule pas. Montrer que f admet un relèvement, c'est-à-dire qu'il existe g holomorphe sur D telle que $f = \exp(g)$.
7. Montrer qu'il n'existe pas de fonction f holomorphe sur $\mathbf{C}$ vérifiant $f \circ f = \exp$. On pourra commencer par montrer qu'une telle fonction admet un relèvement.

Exercice 2.

1. Soit $\gamma : t \in [0, 2\pi] \mapsto e^{it}$, prouver que pour toute fonction g continue sur $\partial D_1(0)$ on a
$$\overline{\int_\gamma g(z)\,\mathrm{d}z} = -\int_\gamma \frac{\overline{g}(z)}{z^2}\,\mathrm{d}z.$$
2. Soit P un polynôme complexe, $z_0 \in \mathbf{C}$, $r > 0$. Montrer que
$$\int_{\partial D_r(z_0)} \overline{P}(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i r^2 \overline{P'}(z_0).$$

Exercice 3. Utiliser la formule de Cauchy pour vérifier l'égalité suivante : pour tout $a \in [-1, 1]$,

$$\int_0^\infty e^{-(1+ia)^2 t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2\,(1+ia)}.$$

En déduire les *intégrales de Fresnel* :

$$\int_0^\infty \cos t^2\, \mathrm{d}t = \int_0^\infty \sin t^2\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

Exercice 4. Soit γ un chemin fermé dans $\mathbf{C}$, C^1 par morceaux, et soit $z \in \mathbf{C} - \mathrm{Im}\gamma$; on définit l'indice de z par rapport à γ par

$$i(z, \gamma) := \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\mathrm{d}w}{w - z}.$$

1. Soit γ un chemin fermé dans $\mathbf{C} - \{0\}$, g la fonction $z \mapsto z^n$, $n > 0$. Montrer que
$$i(0, g \circ \gamma) = n \cdot i(0, \gamma).$$
2. Soit $\Omega \subset \mathbf{C}$ ouvert connexe. Soit γ un chemin fermé tel que $\{z \in \mathbf{C} : i(z, \gamma) \neq 0\} \subset \Omega$. Soit $z \in \Omega - \mathrm{Im}\gamma$, $f : \Omega \longrightarrow f(\Omega)$ un biholomorphisme (*i.e.* une application holomorphe inversible avec inverse holomorphe). Montrer que
$$i(f(z), f \circ \gamma) = i(z, \gamma).$$
3. Soit $k \in \mathbf{Z}$ et γ la courbe définie par $\gamma(t) = e^{ikt}$ (pour $t \in [0, 2\pi[$). Calculer $i(z, \gamma)$ pour tout $|z| \neq 1$.
4. Utiliser le logarithme complexe pour montrer que l'indice est toujours un nombre entier.
5. Déduire de la question précédente que l'indice prend des valeurs constantes sur les composantes connexes de $\mathbf{C} - \mathrm{Im}\gamma$.
6. Montrer que l'indice est toujours égal à 0 sur la composante connexe infinie de $\mathbf{C} - \mathrm{Im}\gamma$.

Exercice 5. Soit $K \subset \mathbf{C}$ un compact à bord C^1 par morceaux. Montrer que le nombre de composantes connexes de ∂K est fini.

Peut-on supposer simplement que K est compact et ∂K localement connexe ?

Exercice 6.

1. Soit $f : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{R}$ une fonction de classe C^1 telle que $K(f) := \{z \in \mathbf{C} : f(z) \leq 0\}$ est un compact non vide et telle que $\mathrm{d}f \neq 0$ sur le bord $\partial K(f) = f^{-1}(0)$. Montrer que $K(f)$ est un compact à bord C^1.
2. Montrer que chaque composante connexe de $\partial K(f)$ est l'image C^1-difféomorphe de $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$. On pourra chercher une courbe γ donnant le paramétrage telle que $\gamma'(t) = i\nabla f(\gamma(t))$ (montrer d'abord que $i\nabla f(\gamma(t))$ est tangent à la courbe γ en tout point).

Exercice 7.

1. Soit $K \subset \mathbf{C}$ un compact à bord C^1 par morceaux et C une composante connexe de ∂K. Montrer qu'il existe un homéomorphisme $h : \mathbf{R}/\mathbf{Z} \longrightarrow C$ qui est C^1 par morceaux.
2. Si h et k sont deux homéomorphismes comme dans la question 7.1, $h^{-1} \circ k$ est-il un difféomorphisme C^1 du cercle ?
3. Soit h comme dans la question 7.1. Soit $t \in \mathbf{R}/\mathbf{Z}$ un point régulier de h, alors les coordonnées orthonormales directes qui définissent le bord C^1 par morceaux de K peuvent être choisies au point $h(t)$ *via* la dérivée $h'(t)$.
Attention : le bord doit être orienté !