Holomorphie - Conditions de Cauchy - Séries Entières

M. Triestino, A. Vaugon

Exercice 1. Soit $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ une fonction holomorphe dans un ouvert connexe D. Si on a

$$a\,u(x,y) + b\,v(x,y) = c \text{ dans } D,$$

a, b et c étant constantes réelles non toutes nulles. Montrer que $f(z)$ est constante dans D.

Exercice 2. Soit D un convexe dans le plan, et soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans D. Montrer que pour tout couple $a, b \in D$, on peut trouver deux points c et d sur le segment joignant a et b, tels que l'on ait

$$f(a) - f(b) = (a-b)(\mathfrak{R}\text{é}\,(f'(c)) + i\,\mathfrak{I}\text{m}\,(f'(d))).$$

Exercice 3. Soit D un ouvert connexe, symétrique par rapport à l'axe réel, ayant une intersection non vide I avec ce dernier. Toute fonction $f(z)$ holomorphe dans D peut se mettre, d'une façon et d'une seule, sous la forme :

$$f(z) = g(z) + i\,h(z) \qquad \text{pour tout } z \in D,$$

où g et h sont deux fonctions holomorphes dans D, réelles sur I. Montrer qu'on a alors

$$\overline{g(\overline{z})} = g(z), \quad \overline{h(\overline{z})} = h(z) \quad \text{et}$$

$$\overline{f(\overline{z})} = g(z) - i\,h(z), \quad \text{pour tout } z \in D.$$

Exercice 4. Soit $n > 1$ entier, soient $c_0 > c_1 > \ldots > c_n > 0$ réels positifs. Montrer que le polynôme

$$p(z) := c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n$$

n'admet pas de racines complexes dans le disque unitaire $\{z \in \mathbf{C} \,:\, |z| \leq 1\}$. Il pourrait être utile de considérer le polynôme $(1-z)p(z)$ et utiliser l'inégalité $|w - z| \geq ||w| - |z||$.

Exercice 5. Montrer que si une série entière $\sum a_n z^n$ (centrée en 0) est constante sur une suite de points $z_1, z_2, \ldots$ qui s'accumulent en 0, alors elle est constante sur son disque de convergence (*Principe des zéros isolés*).

Exercice 6. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ la somme d'une série entière de rayon de convergence infini.

a) Montrer que pour tout $r > 0$,

$$a_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(re^{i\theta})}{r^n e^{in\theta}}\, \mathrm{d}\theta \quad \textit{(formule de Cauchy)}.$$

b) On suppose qu'il existe $R > 0$ et $P \in \mathbf{R}_d[X]$ tels que pour $|z| > R$ on ait $|f(z)| < P(|z|)$. Montrer que f est un polynôme de degré au plus d.

c) En déduire que si, pour tout $z \in \mathbf{C}$, f vérifie $f(z+1) = f(z)$ et $f(z+i) = f(z)$, alors f est constante.

Exercice 7. Soit f la somme d'une série entière de rayon de convergence R. On dit que f admet un *maximum* (resp. *minimum*) *local* en $a \in D(0,R)$ si $|f|$ admet un maximum (resp. minimum) local en a.

a) On suppose f non constante, montrer que f n'admet ni maximum local, ni minimum local non nul.

b) Montrer que tout polynôme complexe non constant admet une racine (*Théorème de d'Alembert-Gauss*).

Exercice 8. Par analogie avec le cas réel, on définit la fonction exponentielle

$$\exp(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Montrer les égalités suivantes :

a) $\overline{\exp(z)} = \exp(\overline{z})$,

b) $\exp(w+z) = \exp(w)\exp(z)$,

c) $(\exp(z))^{-1} = \exp(-z)$,

d) $|\exp(z)| = e^{\Re\text{é}\, z}$.

Exercice 9.

a) Par analogie avec le cas réel, définir la fonction *logarithme* comme la primitive de $1/z$ dans un ouvert $U \subset \mathbf{C}^*$, prolongeant le logarithme réel. Faut-il donner des conditions sur U ?

b) Montrer qu'on ne peut pas prendre $U = \mathbf{C}^*$.

c) Montrer qu'on peut considérer $U = \mathbf{C} -]-\infty, 0]$ (*on note* $]-\infty,0]$ *la demi-droite réelle*).

Exercice 10. Soit f une fonction complexe de variable complexe $z = x + iy$. On note par P la somme de segments $[a,b] + i[c,d]$ (donc P est un rectangle), et on l'oriente dans le sens horaire. On suppose que f soit continue sur P.

a) Définir l'intégrale curviligne

$$\int_{\partial P} f(z)\,\mathrm{d}z.$$

b) Montrer que s'il existe une fonction continue $F : \partial P \longrightarrow \mathbf{C}$ vérifiant

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial x}(z) = f(z) & \text{sur les segments horizontaux,} \\ \frac{\partial F}{\partial y}(z) = if(z) & \text{sur les segments verticaux,} \end{cases}$$

alors $\int_{\partial P} f(z)\,\mathrm{d}z = 0$.

c) Montrer que pour tout rectangle P dans $\mathbf{C}$ et tout $z \notin \partial P$, on a

$$\begin{cases} \int_{\partial P} \frac{\mathrm{d}u}{u-z} = 2\pi i & \text{si } z \in P - \partial P \\ \int_{\partial P} \frac{\mathrm{d}u}{u-z} = 0 & \text{si } z \notin P. \end{cases}$$